

Appunti ed Esercizi di *Termofluidodinamica Applicata*

Capitolo 4. Il moto potenziale

Paolo Di Marco

Versione 2010.01 – 19.10.2010.

La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa per i corsi tenuti dall'autore.

L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione.

Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.

L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.

INTRODUZIONE: IL PROBLEMA GENERALE DEL MOTO DI UN FLUIDO INCOMPRESSIBILE NEWTONIANO

Come già accennato diverse volte, il problema del moto di un fluido incompressibile e newtoniano può essere formulato in termini delle equazioni di continuità e di Navier-Stokes¹

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{v} &= 0 \\ \rho \frac{D \underline{v}}{D t} &= -\operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \underline{v} + \rho \underline{f} \end{aligned} \quad (4.1)$$

ovvero, espandendo la derivata materiale

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{v} &= 0 \\ \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} &= -\rho \underline{v} \cdot \operatorname{grad} \underline{v} - \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \underline{v} + \rho \underline{f} \end{aligned} \quad (4.2)$$

La seconda delle (4.2), con i suoi quattro termini a secondo membro, ci dice che il moto del fluido è determinato da 1) le forze di inerzia, 2) i *gradienti* di pressione (e non, si noti bene, un valore costante della pressione), 3) le azioni viscosi, 4) le forze di massa.

Come già accennato nei capitoli precedenti, il problema in questa forma è ben posto in termini matematici: abbiamo infatti 5 incognite, ovvero le tre componenti della velocità, la pressione, e la densità, e cinque equazioni, ovvero le (4.2) e l'equazione costitutiva del fluido incompressibile ($\rho = \text{cost}$). Nonostante questo, un metodo generale di soluzione a tutt'oggi non esiste, e neppure un teorema generale di esistenza ed unicità della soluzione. In sostanza, il problema costituito dalle (4.2) rimane tuttora uno dei problemi più formidabili della fisica, e la soluzione è stata trovata solo in alcuni casi particolari. Una ulteriore difficoltà è introdotta dall'insorgenza del moto turbolento.

Le difficoltà nascono soprattutto dalla presenza di un termine di secondo ordine ($\mu \nabla^2 \underline{v}$) e di una non linearità ($\rho \underline{v} \cdot \operatorname{grad} \underline{v}$). Pertanto è naturale pensare ad un approccio semplificato in cui una di queste due difficoltà venga rimossa.

Consideriamo, senza perdere eccessivamente in generalità, un moto stazionario in assenza di forze di massa. Anticipiamo un risultato che verrà ottenuto nel Cap.5, dove vedremo che è possibile riformulare le equazioni di Navier-Stokes in forma adimensionale come

$$\underline{v}^* \cdot \operatorname{grad} \underline{v}^* = -\operatorname{grad} p^* + \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{v}^* \quad (4.3)$$

dove Re è un gruppo adimensionale detto *numero di Reynolds* ed è dato da

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad (4.4)$$

e U ed L sono la velocità e la lunghezza caratteristiche del sistema prese a riferimento nell'adimensionalizzazione. È evidente che, dato che tutti i termini adimensionali hanno l'ordine di grandezza dell'unità, a basso numero di Reynolds prevarrà l'influenza del termine

¹ ci limitiamo a considerare il problema meccanico; l'aggiunta dell'equazione dell'energia comporterebbe anche l'aggiunta di una nuova variabile, appunto l'energia interna del fluido.

viscoso, mentre ad alto Re esso sarà trascurabile rispetto al termine inerziale. Si hanno così due casi semplificati che seguono: creeping flow e moto non viscoso.

Creeping flow

In questo caso si suppone che il moto del fluido sia sufficientemente lento da poter trascurare il termine di inerzia $\rho \underline{v} \cdot \text{grad } \underline{v}$, e conseguentemente la non linearità, ottenendo

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{v} &= 0 \\ \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} &= -\text{grad } p + \mu \nabla^2 \underline{v} + \rho \underline{f}' \end{aligned} \quad (4.5)$$

il corrispondente moto viene detto in inglese *creeping flow* (che letteralmente suona più o meno come *flusso strisciante*) ed alcune soluzioni sono state ricavate, a partire dalla celebre soluzione di Stokes per il moto di una sfera rigida immersa in un fluido. Alcuni esempi di tale tipo di moto verranno illustrati nel capitolo 6. Esso trova applicazione principalmente nei problemi di sedimentazione e lubrificazione. Un ulteriore contributo in questo ambito è stato dato da Oosen, che ha reintrodotto il termine inerziale nella forma linearizzata $\rho \underline{U}_0 \cdot \text{grad } \underline{v}$, dove \underline{U}_0 è la velocità (costante) a sufficiente distanza da un corpo immerso.

Moto non viscoso

In questo caso consideriamo un fluido ideale con viscosità nulla (detto anche talvolta fluido Euleriano). Si ottengono così le cosiddette *equazioni di Eulero*, già introdotte nel Cap.3

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{v} &= 0 \\ \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} &= -\rho \underline{v} \cdot \text{grad } \underline{v} - \text{grad } p + \rho \underline{f}' \end{aligned} \quad (4.6)$$

le quali tuttavia presentano ancora il termine non lineare.

In taluni casi, in particolare se il moto è stazionario e le forze di massa conservative, è possibile, una volta trovato il campo di velocità dall'equazione di continuità, derivare il campo di pressione dall'equazione di Bernoulli, che come è noto (v. Cap.3) può essere ottenuta elaborando l'equazione di bilancio della quantità di moto

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \psi + \frac{p}{\rho} \right) = \underline{v} \times \underline{\zeta} \quad (4.7)$$

nella quale il valore della costante è tale lungo una linea di flusso o di vorticità, ma varia in generale tra una linea e l'altra.

MOTO POTENZIALE

Caratteristiche del moto potenziale

Alla formulazione (4.6) si può arrivare anche supponendo il campo di velocità irrotazionale, ovvero supponendo che la vorticità $\underline{\zeta}$ sia nulla. Infatti, nel caso di moto incomprimibile, si ha la seguente identità

$$\nabla^2 \underline{v} = \text{rot}(\text{rot} \underline{v}) = \text{rot} \underline{\zeta} \quad (4.8)$$

Per cui, in caso di vorticità nulla, il termine viscoso si annulla non perché le tensioni viscoso sono nulle, ma in quanto esse sono *autoequilibrate* sulla particella fluida, come vedremo meglio in seguito.

Il fatto che la vorticità sia nulla ha una seconda importante implicazione: dal teorema di Stokes (v. Cap.1) si ricava infatti che un campo irrotazionale è conservativo, e quindi ammette potenziale; per cui è possibile scrivere

$$\text{rot} \underline{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{v} = \text{grad} \varphi \quad (4.9)$$

Dove la funzione φ è appunto il potenziale della velocità². Sostituendo nella equazione di continuità si ottiene

$$\text{div} \underline{v} = \text{div}(\text{grad} \varphi) = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (4.10)$$

Essa va completata con le condizioni al contorno; per una parete solida di normale \underline{n} che si muove con velocità \underline{v}_s

$$\underline{n} \cdot \underline{v}_s = \underline{n} \cdot \underline{v} = \underline{n} \cdot \text{grad} \varphi \quad (4.11)$$

che, ovviamente, si riduce a $\underline{n} \cdot \text{grad} \varphi = 0$ per una parete fissa.

Non è invece necessario (né possibile dal punto di vista matematico³) annullare la *componente tangenziale* della velocità relativa alla parete: in altre parole il fluido, essendo non viscoso, è libero di “scivolare” lungo la parete stessa.

La (4.10) è una delle equazioni più celebri della fisica matematica ed è detta equazione di Laplace. La tab.1 dell’ App. 1.2 riporta la sua espressione esplicita in coordinate cilindriche e sferiche. Essa regola una varietà di fenomeni differenti, come ad esempio l’andamento del campo elettrostatico nei dielettrici, quello di temperatura in un conduttore termico, la deflessione di una membrana elastica sotto carico, lo stato di tensione nella sezione di una trave sottoposta a torsione, etc. Essa è stata quindi risolta associata ad una enorme varietà di condizioni al contorno. Inoltre, la equazione di Laplace è *lineare*, e questo come è noto implica che date due soluzioni dell’equazione, anche una loro combinazione lineare soddisfa all’equazione stessa: la soluzione di un determinato problema può essere quindi ottenuta anche per combinazione lineare di soluzioni note.

² il simbolo φ è stato in precedenza utilizzato anche per la dissipazione viscosa.

³ Infatti il carattere delle equazioni non ci consente di aggiungere una ulteriore condizione al contorno. Per imporre che la velocità tangenziale sia nulla alla parete (la cosiddetta condizione di *no-slip*) è necessario manenere il termine viscoso del secondo ordine nelle equazioni di N-S.

Il problema costituito dalla (4.10) e in aggiunta dalla (4.9) è formalmente analogo a quello di determinare un campo elettrostatico in assenza di cariche libere in un mezzo di permittività dielettrica costante: in tale ambito, il potenziale φ è ovviamente l'analogo del potenziale elettrico V , mentre il campo di velocità \underline{v} è l'analogo del campo elettrico, \underline{E} . La stessa analogia vale per le superfici isopotenziali e per le linee di flusso (linee di forza). Tuttavia le condizioni al contorno che si danno per un campo elettrico sono in genere diverse da quelle che diamo per il campo di velocità: ad esempio, in elettrostatica la superficie di conduttore è isopotenziale, mentre in fluidodinamica la superficie di un solido è una superficie di flusso. La stessa equazione è un caso particolare dell'equazione di Fourier, e regola il campo stazionario di temperatura all'interno di un solido in assenza di sorgenti termiche: in tal caso le linee isopotenziali corrispondono alle isoterme e le linee di flusso indicano la direzione di propagazione del calore.

Se le forze di massa applicate al sistema sono conservative ed il moto è stazionario, una volta trovato il campo di velocità \underline{v} nel fluido risolvendo la (4.10) con opportune condizioni al contorno, non è necessario risolvere le equazioni di Navier-Stokes per trovare il campo di pressione: infatti in questo caso, essendo il moto irrotazionale, il valore della costante dell'equazione di Bernoulli (4.7) è il medesimo in tutto il fluido (v. Cap.3), ed è quindi è sufficiente conoscere il suo valore in un unico punto per poter determinare la pressione in ogni punto del campo di moto. Sotto certe limitazioni, la equazione di Bernoulli mantiene la sua validità anche per un fluido viscoso, come mostrato in App. 4-1.

Ai nostri fini, le dizioni "moto potenziale" e "moto irrotazionale" sono nel seguito equivalenti.

Come accennato già in precedenza, nel moto viscoso irrotazionale le tensioni viscosse mantengono *in generale* un valore non nullo, che, limitandoci al moto incomprimibile, può essere espresso in funzione del potenziale φ come

$$\tau_{ij} = 2\mu \dot{d}_{ij} = 2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.12)$$

ovvero, in forma tensoriale

$$\underline{T} = 2\mu \underline{\dot{D}} = 2\mu \text{grad}(\text{grad } \varphi) \quad (4.13)$$

Ne segue che *in generale* anche la dissipazione viscosa⁴, nel moto irrotazionale di un fluido viscoso, non è nulla, ma vale

$$\mathcal{D}_v = \iiint_V \underline{\dot{D}} : \underline{T} \, dV = 2\mu \iiint_V \underline{\dot{D}} : \underline{\dot{D}} \, dV = 2\mu \iiint_V \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \, dV \quad (4.14)$$

Tensioni viscosse e relativa dissipazione quindi si annullano rigorosamente solo nel caso di un fluido ideale, per il quale la viscosità è nulla. Tuttavia, come meglio precisato in App.4-1, questo non influenza il moto, in quanto le tensioni viscosse si autoequilibrano e la dissipazione viscosa diventa meno rilevante all'aumentare del numero di Reynolds, per cui è ininfluente nella maggior parte dei casi. Anche l'equazione di Bernoulli conserva la sua validità,

⁴ indicata nel presente capitolo con \mathcal{D}_v , per non confonderla con il potenziale φ .

limitatamente al calcolo della pressione idrostatica: ad essa va successivamente aggiunta la eventuale componente deviatorica della tensione normale.

E' opportuno soffermarsi ancora su alcune caratteristiche qualitative del moto potenziale: la forma della Eq.(4.10), che lo governa, ci mostra che questo tipo di moto è *dominato unicamente dalla geometria*: la densità ed il tempo infatti non vi compaiono. Il moto dipende dunque unicamente dalla posizione dei confini che gli si impongono: se essi variano, essendo la (4.10) un'equazione di tipo ellittico, l'effetto della variazione si risente istantaneamente in tutto il flusso sia a monte che a valle, sia pur naturalmente con intensità decrescente con la distanza dal punto della variazione. Inoltre il campo di velocità del moto potenziale, anche quando non è stazionario, non ha memoria del passato, ovvero la storia precedente non influenza il moto in un determinato istante: non ci sono effetti di "immagazzinamento" a causa dell'assenza delle derivate temporali. Tutto questo non vale per il campo di pressione, che è determinato a partire da quello di velocità tramite l'equazione di Bernoulli o di N-S, ed è invece influenzato dai valori della densità e/o del tempo.

Condizioni di esistenza del moto potenziale

Una volta illustrata la relativa semplicità con cui si può risolvere il moto potenziale, rimane da stabilire se questa condizione è rilevante dal punto di vista pratico. Perché la condizione di moto irrotazionale si verifichi, non è strettamente necessario che la viscosità del fluido sia nulla: ad esempio un moto uniforme è senz'altro irrotazionale. L'equazione di vorticità, introdotta nel Cap.3, ci mostra (sia pure in modo solo qualitativo) che la viscosità del fluido (unita ad un gradiente di velocità) è la principale causa dell'insorgenza di vorticità nel moto. Una serie di teoremi, tra cui quello di Lagrange e quello di Kelvin, illustrati ad esempio nel Cap.6 del Batchelor, assicurano più rigorosamente che un moto *incomprimibile* inizialmente irrotazionale permane di tale natura, indipendentemente dal fatto che il fluido sia viscoso o meno, e la vorticità non può essere generata al suo interno, ma solo esservi introdotta per diffusione dalle pareti o per l'azione di forze rotazionali. Proseguendo quindi nell'esempio precedente, in un fluido in moto uniforme la vorticità insorge quando esso incontra un ostacolo, a causa degli effetti viscosi alla parete.

Come vedremo meglio in seguito nel Cap.6, quando il numero di Reynolds, Re , è alto gli effetti viscosi sono comunque confinati in un sottile strato di fluido a contatto del corpo, detto *strato limite*, mentre al di fuori di esso il moto si mantiene irrotazionale: questo rende il moto potenziale di interesse pratico in numerose applicazioni, specialmente per i moti esterni. Il modello moto potenziale - strato limite cade in difetto quando Re è basso o al momento in cui lo strato limite si *distacca* dalla superficie corpo, formando una *scia*: detta scia costituisce una regione significativa in cui la vorticità non è nulla e quindi il moto cessa di essere irrotazionale.

In sostanza, si può concludere affermando che il moto potenziale è una rappresentazione significativa del moto di un fluido per alti valori del numero di Reynolds, al di fuori dello strato limite e delle scie. In ogni caso, i concetti di moto potenziale e di fluido non viscoso debbono essere mantenuti rigorosamente separati.

IL MOTO POTENZIALE BIDIMENSIONALE

La funzione di corrente nei moti potenziali

Come mostrato alla fine del Cap.3, per ogni moto bidimensionale (sia esso potenziale o meno) è possibile definire una funzione di corrente. Nel caso di moto potenziale piano vale inoltre la condizione

$$\text{rot } \underline{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \underline{k} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad (4.15)$$

sostituendo alle componenti della velocità le loro espressioni mediante la funzione di corrente si ottiene quindi

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \Psi = 0 \quad (4.16)$$

Quindi anche la funzione di corrente, *in questo caso*, soddisfa l'equazione di Laplace (ovvero è armonica).

Linee di flusso, linee isopotenziali e loro intercambiabilità

Deriviamo l'equazione delle linee isopotenziali, ovvero quelle per cui $\phi = \text{cost}$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = v_x dx + v_y dy = 0 \quad (4.17)$$

per cui

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v_x}{v_y} \quad (\phi = \text{cost}) \quad (4.18)$$

Nel Cap.3 è stato già mostrato che le linee a $\Psi = \text{cost}$ sono le linee di flusso del moto, per cui si ha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} \quad (\Psi = \text{cost}) \quad (4.19)$$

I coefficienti angolari delle due famiglie di linee sono quindi antireciproci, per cui le linee sono tra loro ortogonali.

Per un moto *piano* potenziale si può concludere quindi, che dato che sia la funzione di corrente che il potenziale rispettano l'equazione di Laplace e le due famiglie di linee di flusso e isopotenziali sono ortogonali, esse sono mutuamente *intercambiabili*, ovvero dato un moto potenziale se ne può ottenere un altro (detto il suo *duale*) semplicemente scambiando il ruolo delle due famiglie di linee.

Moti potenziali fondamentali

Moto uniforme

Il moto uniforme è il più semplice dei moti potenziali. In esso le linee di flusso ed isopotenziali sono due fasci mutuamente ortogonali di rette parallele ed equispaziate. Detta α l'inclinazione della velocità rispetto all'asse x , le loro equazioni sono rispettivamente

$$\begin{aligned}\varphi &= U(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \\ \Psi &= U(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)\end{aligned}\tag{4.20}$$

Il campo di velocità è quindi dato da

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U \cos \alpha \\ v_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = U \sin \alpha\end{aligned}\tag{4.21}$$

Il duale di un moto uniforme è nuovamente un moto uniforme ruotato di 90° .

Sorgente/pozzo piano (line source/sink)

Il moto rappresenta il flusso piano entrante od uscente da un asse perpendicolare al piano del moto nell'origine. L'origine rappresenta una singolarità in cui la velocità tende all'infinito.

In un sistema di coordinate polari le linee di flusso ed isopotenziali hanno equazioni

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{m}{2\pi} \ln r \\ \Psi &= \frac{m}{2\pi} \theta\end{aligned}\tag{4.22}$$

La costante m è detta *intensità* della sorgente e si può verificare facilmente che rappresenta il flusso volumetrico (per unità di altezza) entrante o uscente dall'origine.

Le linee di flusso sono quindi rette uscenti (o entranti) dall'origine, le linee isopotenziali sono circonferenze centrate nell'origine; se i valori di potenziale associate a queste ultime differiscono per una costante, le circonferenze si allontanano tra loro al crescere della distanza dall'origine, a causa della presenza del logaritmo nella prima delle (4.22). L'andamento è rappresentato in Fig.4.1.

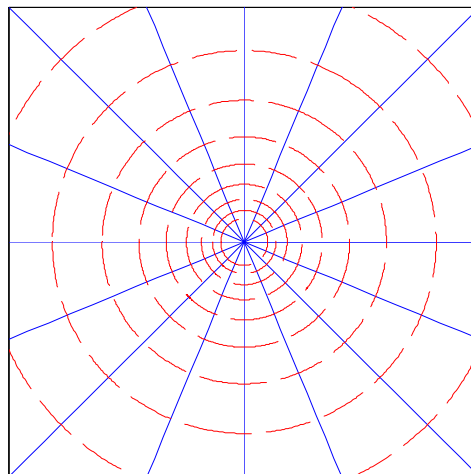


Figura 4.1: Linee di flusso (blu, continue) ed isopotenziali (rosse, a tratti) per una sorgente/pozzo piano.

A prima vista può sembrare singolare avere come argomento del logaritmo nella (4.22) una variabile dimensionale, r . Tuttavia bisogna notare che sia il potenziale che la funzione di corrente sono definite a meno di una costante, per cui sarebbe facile porre più correttamente

$$\varphi = \frac{m}{2\pi} \ln r + C = \frac{m}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} \quad (4.23)$$

Tale costante influenza solo il valore numerico che viene associato a ciascuna linea isopotenziale e non il calcolo delle velocità, che sono ottenute per derivazione; pertanto generalmente i testi non la riportano.

Il campo di velocità è dato da

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{m}{2\pi r} \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Il duale di una sorgente piana è un *vortice irrotazionale*, descritto nel seguito.

Vortice irrotazionale (line vortex)

Il vortice irrotazionale è ottenuto a partire da una sorgente scambiando il ruolo delle linee di flusso ed isopotenziali, ovvero

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \Psi &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \end{aligned} \quad (4.25)$$

Il vortice irrotazionale rappresenta quindi un flusso rotante intorno all'origine: poiché in tale moto la rotazione rigida delle particelle è nulla, la vorticità è a sua volta nulla. La costante Γ è la circuitazione della velocità lungo un qualunque percorso chiuso che circonda l'origine: pur essendo il moto irrotazionale, in questo caso il teorema di Stokes non si applica in quanto l'origine è una singolarità. La circuitazione lungo una qualunque linea chiusa che non include l'origine è invece nulla.

Il campo di velocità è quindi dato da

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0 \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Un vortice irrotazionale rappresenta realmente la struttura di un vortice a sufficiente distanza dall'asse, che costituisce una singolarità. In prossimità dell'asse la struttura è più simile a quella di un vortice rigido (non irrotazionale) per cui si ha

$$\begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_\theta &= \omega r \end{aligned} \quad (4.27)$$

Un vortice reale può essere rappresentato in maniera semplice come la combinazione di un vortice rigido ed uno irrotazionale che si saldano ad un raggio r_0 , v. Fig.4.2. Vi sono anche modelli più complessi sia per il nucleo che per la parte potenziale di un vortice: ad esempio, aggiungendo un pozzo nell'origine si ottengono delle linee di corrente che si avvolgono a spirale.

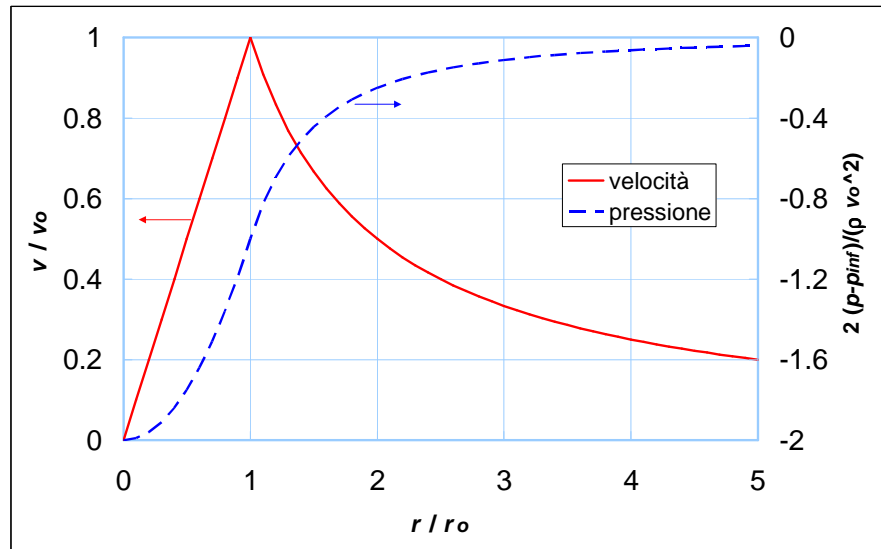


Figura 4.2: Andamento di velocità e pressione in un vortice reale.

Si potrebbe dimostrare facilmente che in un vortice la pressione aumenta allontanandosi dall'asse di rotazione: questo risultato, per un vortice irrotazionale, può essere facilmente ottenuto tramite l'equazione di Bernoulli. Per un vortice rotazionale la dimostrazione è più complessa, ma può bastare l'intuizione fisica che ciò deve avvenire per effetto della forza centrifuga: per maggiori dettagli in merito si veda l'Appendice 3.1 e l'esempio 4.1.

Il fatto che all'interno di un vortice la pressione diminuisca può portare, in condizioni di alta umidità relativa, alla condensazione del vapore presente nell'aria: questo spiega le strisce bianche che a volte si formano a partire dai bordi delle ali degli aerei o da altri punti di discontinuità della fusoliera o della carrozzeria delle auto, ovunque cioè si possa avere la formazione di un vortice.

ESEMPIO 4.1 – Vortice.

Un piccolo tornado (densità $\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$) è rappresentabile tramite un vortice dal nucleo centrale rigido circondato da una zona irrotazionale, come in Fig.4.2, e la velocità massima del vento è pari a 108 km/h ad un raggio $r_0 = 100 \text{ m}$. Valutare la velocità del vento a 1 km dall'asse e la pressione relativa per $r = r_0$ e sull'asse del vortice.

La soluzione è riportata nel file C4VRANK.XLS

Dalla seconda delle (4.26) si ottiene facilmente, nella zona potenziale del vortice

$$v_{\theta}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad \rightarrow \quad \frac{v_{\theta}(r)}{v_{\theta}(r_0)} = \frac{r_0}{r}$$

quindi la velocità del vento a 1 km dall'asse vale 10.8 km/h.

L'andamento della pressione nella zona di moto potenziale è ricavabile dall'equazione di Bernoulli, riferita alla pressione atmosferica a grande distanza dall'asse, dove la velocità è nulla

$$\frac{v_{\theta}^2(r)}{2} + \frac{p(r)}{\rho} = \frac{p_{atm}}{\rho} \quad \rightarrow \quad p(r) - p_{atm} = -\frac{1}{2}\rho v_{\theta}^2$$

Per cui ad $r = r_0$ (essendo $108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$) la pressione relativa vale -553 Pa (-5.5 mbar). Sull'asse del vortice, essendo la vorticità non nulla, l'equazione di Bernoulli non è più applicabile. D'altro canto (v. App.3.1) la pressione in tale zona è data da

$$\frac{dp}{dn} = -\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{v_{\theta}^2}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{dr} = \rho \omega^2 r$$

Integrando l'equazione precedente tra 0 ed r_0 si ottiene

$$p(r_0) - p(0) = \frac{1}{2}\rho \omega^2 r_0^2 \quad \rightarrow \quad p(0) - p(r_0) = -\frac{1}{2}\rho v_{\theta}^2(r_0)$$

da cui combinando con l'espressione di $p(r_0)$ ottenuta dal moto potenziale si ha infine

$$p(0) - p_{atm} = -\rho v_{\theta}^2(r_0) = -1106 \text{ Pa}$$

□

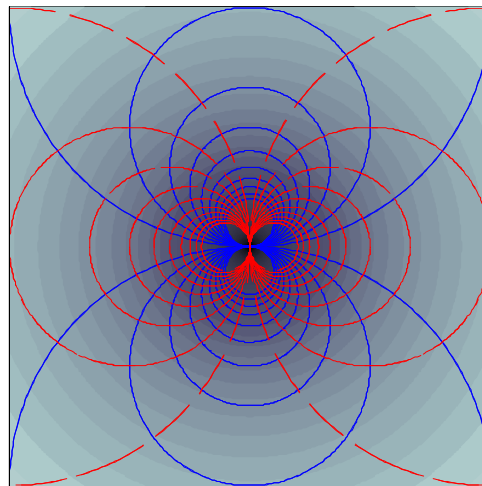


Figura 4.3: Linee di flusso (blu, continue) ed isopotenziali (rosse, a tratti) per un doppietto piano con asse verticale e relativo campo di pressione (a simmetria circolare).

Doppietto piano

Un *doppietto* si ottiene considerando il campo di un pozzo e di una sorgente di uguale intensità, $\pm m$, posti a distanza a , facendo tendere a zero la loro distanza mantenendo costante il prodotto ma . Il processo è analogo a quello con cui, in elettrostatica, si crea un campo di dipolo. Si dice *asse* del doppietto l'asse del segmento a . In un sistema di coordinate polari il cui asse r coincide con la congiungente il pozzo e la sorgente, orientato dalla sorgente verso il pozzo, le linee di flusso ed isopotenziali hanno equazioni

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{K}{r} \cos \theta \\ \Psi &= -\frac{K}{r} \sin \theta\end{aligned}\tag{4.28}$$

dove $K = ma$ si dice *intensità* (o talvolta anche *momento*) del doppietto. Il campo di velocità è quindi dato da

$$\begin{aligned}v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = -\frac{K}{r^2} \cos \theta \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{K}{r^2} \sin \theta\end{aligned}\tag{4.29}$$

Le linee di flusso sono cerchi di raggio crescente tangenti all'asse del doppietto. Le linee isopotenziali hanno lo stesso aspetto, ma sono ruotate di 90° , vedi Fig.4.3. L'origine rappresenta una singolarità in cui la velocità tende all'infinito.

Il duale di un doppietto è nuovamente un doppietto ruotato di 90° .

Sorgente/pozzo puntiforme (point source/sink)

La sorgente o pozzo puntiforme rappresenta il flusso che si origina (o si raccoglie, nel caso di un pozzo) in un unico punto dello spazio (esso equivale al campo elettrico generato da una carica puntiforme). Il moto ha simmetria sferica e la velocità è funzione unicamente del raggio, pertanto esso è meglio descritto in un sistema di coordinate sferiche (r, θ, ϕ) con l'asse r che punta in una direzione arbitraria; la coordinata ϕ non compare. Le superfici isopotenziali sono sfere centrate nell'origine. Dato che $v = f(r)$, la funzione di corrente dipende solo da θ , e le superfici di flusso sono coni uscenti dall'origine. Si ha quindi

$$\begin{aligned}\varphi &= -\frac{m}{4\pi r} \\ \Psi &= \frac{m}{4\pi} (1 - \cos \theta)\end{aligned}\tag{4.30}$$

Il campo di velocità è dato da

$$\begin{aligned}v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{m}{4\pi r^2} \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0\end{aligned}\tag{4.31}$$

Doppietto sferico

Il doppietto sferico è originato, analogamente a quello piano, dalla sovrapposizione al limite di una sorgente e di un pozzo puntiformi, si ottiene così

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{K}{4\pi r^2} \cos \theta \\ \Psi &= -\frac{K}{4\pi r} \sin^2 \theta \end{aligned} \tag{4.32}$$

Il campo di velocità è dato da

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = -\frac{K}{2\pi r^3} \cos \theta \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{K}{4\pi r^3} \sin \theta \end{aligned} \tag{4.33}$$

Le linee di flusso e isopotenziali, vedi Fig.4.4 hanno qualitativamente lo stesso andamento di Fig.4.3, ma non sono circolari; inoltre in questo caso le prime si sviluppano in superfici toroidali attorno all'asse r , mentre le seconde sono superfici sferoidali tangenti nell'origine. Il campo è analogo a quello elettrostatico prodotto da un dipolo elettrico. L'asse di simmetria è detto asse del doppietto (o del dipolo).

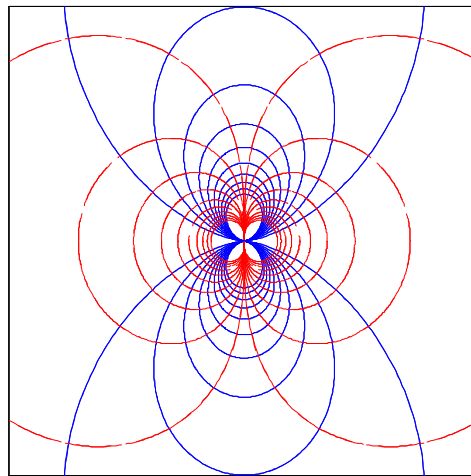


Figura 4.4: Linee di flusso (blu, continue) ed isopotenziali (rosse, a tratti) per un doppietto sferico con asse verticale.

Combinazioni dei moti fondamentali

Grazie alla linearità dell'equazione di Laplace, una volta definiti i moti potenziali fondamentali, le cui caratteristiche sono riassunte in Tab.4.1, se ne possono ricavare numerosi altri per sovrapposizione lineare. Esistono anche tecniche per simulare il moto attorno ad un oggetto di forma complessa sovrapponendo moti uniformi, doppietti e sorgenti opportunamente localizzati. Bisogna anche tener conto che, una volta determinate le linee di flusso del moto, una qualunque di esse può rappresentare una parete solida, dato che non è attraversata dal fluido. Ad esempio, è abbastanza facile rappresentare il moto potenziale in un imbuto conico considerando solo un settore di un pozzo sferico. Nel seguito vengono illustrati i casi del moto potenziale attorno ad un cilindro ed una sfera, come casi particolari del moto attorno ad un corpo tozzo.

	φ	Ψ	\underline{v}
Uniforme	$U(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$	$U(y \cos \alpha - x \sin \alpha)$	$v_x = U \cos \alpha$ $v_y = U \sin \alpha$
Sorgente/pozzo piano	$\frac{m}{2\pi} \ln r$	$\frac{m}{2\pi} \theta$	$v_r = m/2\pi r$ $v_\theta = 0$
Sorgente/pozzo puntiforme	$-\frac{m}{4\pi r}$	$\frac{m}{4\pi} (1 - \cos \theta)$	$v_r = \frac{m}{4\pi r^2}$ $v_\theta = 0$
Vortice irrotazionale	$\frac{\Gamma}{2\pi} \theta$	$-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$	$v_r = 0$ $v_\theta = \Gamma/2\pi r$
Doppietto piano	$\frac{K}{r} \cos \theta$	$-\frac{K}{r} \sin \theta$	$v_r = -K \cos \theta / r^2$ $v_\theta = -K \sin \theta / r^2$
Doppietto sferico	$\frac{K}{4\pi r^2} \cos \theta$	$-\frac{K}{4\pi r} \sin^2 \theta$	$v_r = -\frac{K}{2\pi r^3} \cos \theta$ $v_\theta = -\frac{K}{4\pi r^3} \sin \theta$

Tabella 4.1: Riassunto delle principali funzioni per i moti piani fondamentali.

Moto attorno ad un cilindro

Supponiamo di avere un cilindro circolare di raggio a investito da una corrente uniforme di velocità U_0 . Il moto a sufficiente distanza dal cilindro è irrotazionale e, se il fluido non è viscoso, permane tale anche nell'intorno del cilindro o comunque al di fuori dello strato limite. Questo moto è descritto in un sistema di coordinate cilindriche (r, θ) dal problema differenziale

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = 0 \\ v_r(a) = 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \underline{v} = \underline{U}_0 \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Dove è opportuno notare ancora una volta che non si è posta alcuna condizione sul valore di v_θ alla superficie del cilindro, dato che, essendo il fluido non viscoso, si suppone che possa “scivolare” sulla superficie del cilindro stesso. In sostanza, ci limitiamo ad imporre che la velocità del fluido sia tangente alla superficie del cilindro. Questo avviene comunque al confine dello strato limite, e supposto che quest’ultimo si mantenga sottile ed aderente al cilindro stesso, non cambia i termini del problema.

Si constata che una soluzione derivante dalla somma del moto uniforme con un doppietto soddisfa il problema (4.34). Ponendo $\alpha = 0$ e $x = r \cos \theta$ il potenziale e la funzione di corrente divengono

$$\varphi = U_0 r \cos \theta + \frac{K}{r} \cos \theta = \left(U_0 + \frac{K}{r^2} \right) r \cos \theta \quad (4.35)$$

$$\Psi = U_0 r \sin \theta - \frac{K}{r} \sin \theta = \left(U_0 - \frac{K}{r^2} \right) r \sin \theta \quad (4.36)$$

Infatti, dato che l’equazione di Laplace è lineare, la somma di due soluzioni è di nuovo una soluzione dell’equazione stessa. Inoltre si vede che la funzione di corrente si annulla (ed è quindi costante) su una circonferenza che è quindi una linea di flusso, e rappresenta la parete del cilindro. Per quanto riguarda le condizioni al contorno si determinano le velocità alternativamente dalla funzione di corrente o dal potenziale

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \left(U_0 - \frac{K}{r^2} \right) \cos \theta \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = - \left(U_0 + \frac{K}{r^2} \right) \sin \theta \end{aligned} \quad (4.37)$$

la condizione all’infinito è automaticamente soddisfatta; si impone quindi la condizione al contorno del cilindro per determinare il valore di K , ottenendo

$$v_r|_{r=a} = \left(U_0 - \frac{K}{a^2} \right) \cos \theta = 0 \quad \rightarrow \quad K = U_0 a^2 \quad (4.38)$$

da cui i valori delle velocità sono

$$\begin{aligned} v_r &= U_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ v_\theta &= -U_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \end{aligned} \quad (4.39)$$

Dove il segno negativo nella velocità tangenziale indica che la rotazione è in senso opposto (ovvero orario) a quello delle θ crescenti. Il moto è rappresentato in Fig.4.5.

L’andamento della pressione nel fluido è ottenibile dall’equazione di Bernoulli. Essendo il fluido incomprimibile, il moto irrotazionale e le forze di massa assenti, si ha

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \text{cost} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}U_0^2 \quad (4.40)$$

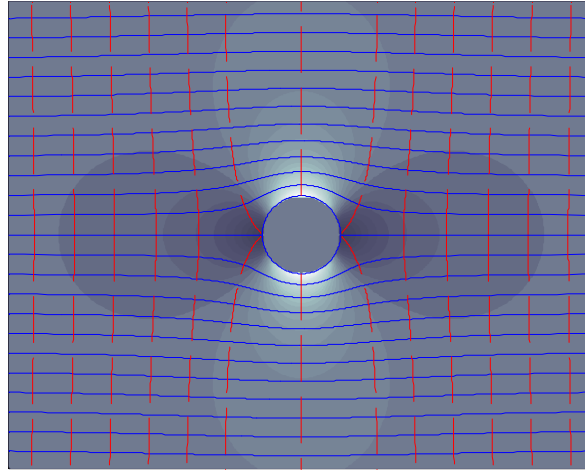


Figura 4.5: Linee di flusso (blu, continue) ed isopotenziali (rosse, a tratti) per il moto attorno ad un cilindro fisso. E' rappresentato anche il campo di pressione.

In particolare risulta interessante calcolare l'andamento di velocità e pressione lungo la superficie del cilindro. La velocità radiale è ovviamente nulla per la (4.38), mentre si ha

$$v_{\theta}|_{r=a} = v_{\theta s} = -2U_0 \sin \theta \quad (4.41)$$

dalla quale si nota che la velocità è nulla sulla superficie per $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 180^\circ$ (ovvero nei cosiddetti *punti di ristagno* anteriore e posteriore) ed ha un massimo pari al doppio della velocità imperturbata ($-2U_0$) per $\theta = 90^\circ$.

Dalle (4.40) e (4.41) si ha quindi alla superficie del cilindro

$$p_s - p_0 = \frac{1}{2}\rho U_0^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \quad (4.42)$$

Nei punti di ristagno ed a 90° si ha quindi

$$\begin{aligned} \theta = 0^\circ, 180^\circ & \quad v_s = 0 & \quad p_s - p_0 = \frac{1}{2}\rho U_0^2 \\ \theta = \pm 90^\circ & \quad v_s = \mp 2U_0 & \quad p_s - p_0 = -3\rho U_0^2 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Quindi la pressione è negativa lungo il fianco del cilindro, precisamente nell'intervallo $30^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$. Questa caratteristica è comune a tutti i corpi tozzi ed è dovuta al fatto che il fluido deve incrementare la sua velocità lungo i fianchi dell'ostacolo per superarlo, a spese della pressione. Nei punti di ristagno, al contrario, il fluido si arresta completamente e tutta la sua energia è convertita in energia di pressione: la corrispondente sovrappressione raggiunta (che è la massima possibile) è detta *pressione dinamica*.

Questo spiega, ad esempio, come si possano inserire in opportuni punti della carrozzeria di un'auto delle prese d'aria *estrattrici*, ovvero attraverso le quali l'aria viene estratta all'esterno

per effetto del campo di pressione negativo, e come mai i teloni dei camion in moto siano inflessi verso l'esterno nella parte prossima alla cabina di guida.

ESEMPIO 4.2 – Cilindro in corrente uniforme.

Un flusso di acqua (densità $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) investe il pilone di circolare di un ponte di raggio $a = 0.5 \text{ m}$ ad una velocità pari a 8 m/s . Ad una profondità sufficiente il moto può essere considerato piano. Valutare la velocità dell'acqua e la sua pressione (rispetto al valore a distanza infinita dal pilone) 0.25 m prima del punto di ristagno, sull'asse di simmetria del moto.

Accettando l'ipotesi di moto potenziale nella parte anteriore del cilindro, dalle (4.39) si ha, per $\theta = 180^\circ$

$$v_r = -U_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$v_\theta = 0$$

Da cui la pressione è facilmente ricavabile mediante l'equazione di Bernoulli

$$p(r) - p_0 = \frac{1}{2} \rho U_0^2 \left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)^2 \right]$$

Per $r = 0.75 \text{ m}$ e $U_0 = 8 \text{ m/s}$ si ha quindi $v_r = -4.4 \text{ m/s}$, $p(r) - p_0 = 22.1 \text{ kPa}$ (0.22 bar). Il segno negativo della velocità indica che il moto è diretto verso l'origine.



Forza fluidodinamica agente sul cilindro – Paradosso di D'Alembert

La risultante delle forze fluidodinamiche agenti sulla superficie solida si scompone in due componenti: quella parallela alla direzione del moto è detta *forza resistente* (o di *drag*) e quella in direzione perpendicolare *forza portante* (o di *lift*). Se si prende in considerazione un fluido ideale, bisogna considerare le sole forze di pressione, dato che il tensore deviatorico è per definizione nullo. Le correzioni da apportare nel caso di fluido viscoso sono prese in considerazione in App. 4-1.

Quindi la forza resistente agente su un cilindro di lunghezza b , investito da un fluido ideale di velocità U , è data dalla risultante delle forze di pressione agenti sul cilindro proiettate nella direzione del moto

$$F_D = b \iint_A (p_s - p_0) \cos \theta \, dA = b \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho U_0^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \cos \theta \, a \, d\theta = 0 \quad (4.44)$$

Ne segue che il moto potenziale prevede che un fluido ideale eserciti una *forza resistente nulla* su un cilindro: questo risultato, detto *paradosso di D'Alembert*, in quanto da lui formulato nel 1752, è estendibile anche a qualunque corpo tozzo in una corrente uniforme ed è palesemente contrario all'evidenza sperimentale, come notato immediatamente da D'Alembert stesso.

Analogamente nulla è la forza portante esercitata in direzione perpendicolare al moto, il che invece è confermato dall'esperienza oltre che da considerazioni di simmetria.

$$F_L = b \iint_A (p_s - p_0) \sin \theta \, dA = b \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho U_0^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \sin \theta \, a \, d\theta = 0 \quad (4.45)$$

Il paradosso di D'Alembert indusse la comunità scientifica a considerare il moto potenziale di un fluido ideale come una pura astrazione matematica priva di applicazioni pratiche, fin quando agli inizi del '900 Ludwig Prandtl non lo riportò clamorosamente in auge formulando la teoria dello strato limite e della formazione della scia a causa del suo distacco (su cui torneremo nel Cap.6). Infatti il campo di pressione derivante dal moto potenziale di un fluido ideale presenta una simmetria "prua-poppa" che annulla la forza resistente: nel caso reale, come vedremo in seguito (Cap.6), la forza resistente è originata sia dalle tensioni deviatoriche alla parete che dal distacco dei filetti fluidi dalla superficie nella parte posteriore del corpo; quest'ultimo fenomeno, ad alto numero di Reynolds, è prevalente nei corpi tozzi e dà luogo alla formazione di una scia che rende il campo di pressione asimmetrico.

La formazione della scia dunque rende la teoria del moto potenziale del tutto inadeguata a prevedere il moto nella parte posteriore del corpo. E ancor più sfortunatamente, essendo l'equazione di Laplace un'equazione ellittica, la presenza della scia influenza anche il campo di moto nella parte anteriore del corpo: tuttavia, come mostrato dalla Fig.4.6, la previsione del campo di pressione sulla parte anteriore del cilindro rimane accettabile, almeno fino ad un angolo di circa 45°.

In conclusione, come del resto era logico aspettarsi, il modello di moto potenziale presenta limitazioni nel prevedere le forze fluidodinamiche sui corpi. Ma come vedremo nel seguito, generalmente queste limitazioni sono minori del previsto, specialmente per le forze portanti.

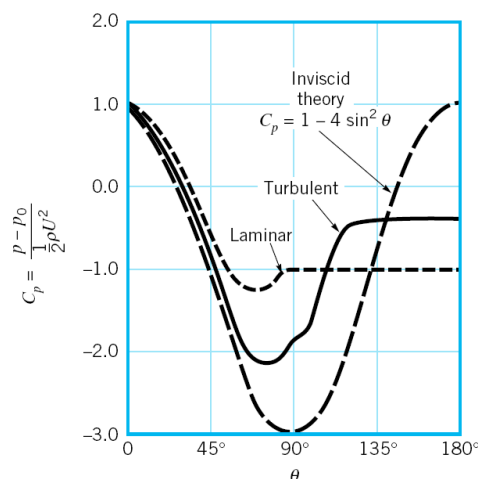


Figura 4.6: Campo di pressione ideale e reale sulla superficie di un cilindro fisso, per strato limite laminare e turbolento.

Moto attorno ad un cilindro rotante

Se al moto descritto dalla (4.37) aggiungiamo un vortice irrotazionale con circuitazione Γ arbitraria, otteniamo un campo di velocità che si presta a simulare quello esistente attorno a un cilindro che ruota

$$\varphi = U_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) r \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (4.46)$$

$$\Psi = U_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) r \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (4.47)$$

Il campo di velocità è dato da

$$\begin{aligned} v_r &= U_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ v_\theta &= -U_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Le equazioni precedenti mostrano che la simulazione del campo di velocità intorno ad un cilindro rotante è solo parziale. Infatti la velocità tangenziale alla superficie del cilindro non è costante e vale

$$v_\theta|_{r=a} = v_{\theta s} = -2U_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (4.49)$$

mentre quella della superficie solida del cilindro ovviamente lo è, e vale ωa ; del resto, in assenza della condizione di no-slip, le due velocità possono essere diverse⁵. Nella realtà la rotazione del fluido è effettivamente indotta dalle azioni viscosive in prossimità della superficie del cilindro; questo rende però difficile stabilire un legame diretto tra velocità angolare del cilindro e circuitazione, che rimane comunque minore del suo valore “teorico” $\Gamma = 2\pi\omega a^2$ (ovvero velocità tangenziale della superficie solida del cilindro per la circonferenza).

La (4.49) mostra che i punti di ristagno si spostano l’uno verso l’altro e si dispongono ad un angolo dato da

$$\theta_0 = \arcsin \left(\frac{\Gamma}{4\pi a U_0} \right) \quad (4.50)$$

Per cui le linee di corrente hanno l’aspetto di Fig.4.7.b. Se $\frac{\Gamma}{4\pi a U_0} > 1$ il punto di ristagno si

sposta all’esterno del cilindro e quest’ultimo è circondato da una porzione di fluido che ruota intorno ad esso senza mai abbandonarlo, dato che le streamlines si richiudono su sé stesse, vedi Fig.4.7.c-d.

La (4.49) consente di calcolare il campo di pressione sulla superficie del cilindro

$$p_s - p_0 = \frac{1}{2} \rho U_0^2 \left(1 - 4 \sin^2 \theta + \frac{2\Gamma \sin \theta}{\pi a U_0} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2 U_0^2} \right) \quad (4.51)$$

Analogamente a quanto visto in precedenza, la forza di drag è comunque nulla

⁵ Dal punto di vista strettamente matematico, la soluzione del problema (4.34) non è unica ed è rappresentata sia dalle (4.39) che dalle (4.48), in quanto il dominio è *doppiamente connesso*. In altre parole il fluido ha la possibilità di aggirare il cilindro sia di sopra che di sotto, e anche di circolarvi attorno.

$$\begin{aligned}
 F_D &= b \iint_A (p_s - p_0) \cos \theta dA = \\
 &= b \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho U_0^2 \left(\cos \theta - 4 \cos \theta \sin^2 \theta + \frac{2\Gamma \cos \theta \sin \theta}{\pi a U_0} - \frac{\Gamma^2 \cos \theta}{4\pi^2 a^2 U_0^2} \right) a d\theta = 0 \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

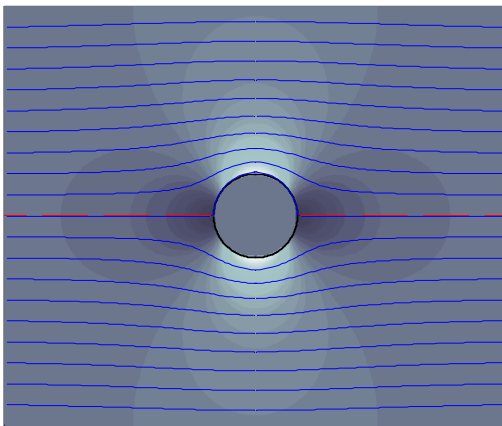
Mentre la forza di lift ha una componente il cui integrale non è nullo (il terzo addendo) e vale

$$\begin{aligned}
 F_L &= b \iint_A (p_s - p_0) \sin \theta dA \\
 &= b \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho U_0^2 \left(\sin \theta - 4 \sin 3\theta + \frac{2\Gamma \sin^2 \theta}{\pi a U_0} - \frac{\Gamma^2 \sin \theta}{4\pi^2 a^2 U_0^2} \right) a d\theta = -\rho b U_0 \Gamma \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

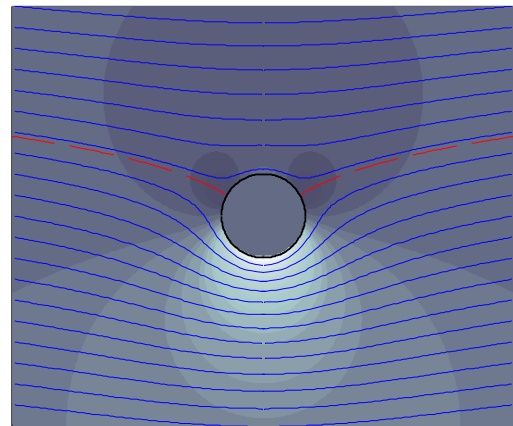
Questo è in accordo con il fatto (ben noto a tutti i giocatori di sport con la palla) che un corpo tozzo rotante su sé stesso è soggetto ad una forza, detta comunemente *effetto*, in direzione perpendicolare al moto.

La (4.53) può anche essere espressa mediante il *coefficiente di portanza o di lift*, C_L

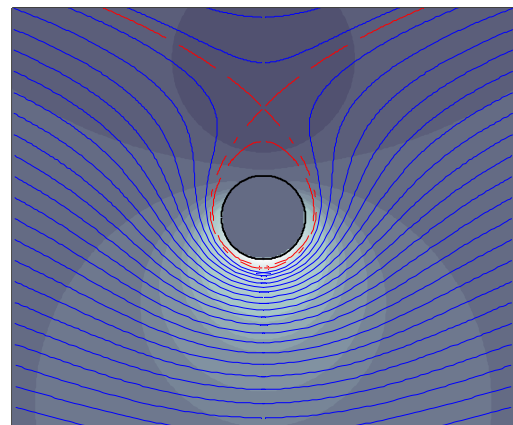
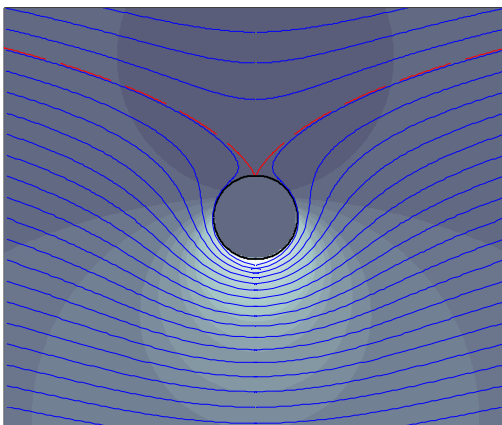
$$|F_L| = C_L \frac{1}{2} \rho U_0^2 (2ba) \quad \text{dove} \quad C_L = \frac{\Gamma}{U_0 a} \quad (4.54)$$



$\Gamma / 4 \pi a U_0 = 0$



$\Gamma / 4 \pi a U_0 = 0.5$



$$\Gamma / 4 \pi a U_0 = 1$$

$$\Gamma / 4 \pi a U_0 = 1.5$$

Figura 4.7: Linee di flusso (blu, continue) ed isopotenziali (rosse, a tratti) per il moto attorno ad un cilindro fisso o rotante, per vari valori della circuitazione. E' rappresentato anche il campo di pressione.

Più in generale, la (4.53) rappresenta un caso particolare di un teorema fondamentale per l'aerodinamica, il *teorema di Kutta-Joukowski*⁶, che stabilisce che l'esistenza una forza portante su un corpo investito da una corrente fluida è comunque legata al fatto che la circuitazione della velocità su una linea che lo circonda non è nulla.

Le esperienze effettuate mostrano che la forza di lift su un cilindro rotante è effettivamente proporzionale alla velocità di rotazione ω fino a $\omega a / U_0 \cong 2.5$ (vedi Fig.4.8) dopodiché essa cresce più lentamente di quanto previsto dalla teoria del moto potenziale. I fenomeni di distacco dello strato limite nell'intorno del cilindro complicano notevolmente la situazione. Dalla Fig.4.8 si nota che anche il coefficiente di resistenza è notevolmente elevato.

Volendo stabilire un legame empirico tra circuitazione e velocità angolare del cilindro, si nota che la retta che interpola i valori sperimentali per $\omega a / U_0 < 2.5$ ha equazione (v. Fig. 4.8)

$$C_L = \pi \left(\frac{\omega a}{U_0} - 0.4 \right) \quad (4.55)$$

quindi per confronto con la (4.54) la circuitazione indotta dalla rotazione del cilindro vale

$$\Gamma = \pi a (\omega a - 0.4 U_0) \quad (4.56)$$

Nella Fig.4.8 è riportato anche il coefficiente di resistenza del cilindro rotante, definito come

$$F_D = C_D \frac{1}{2} \rho U_0^2 (2ba) \quad (4.57)$$

che, come si nota, è notevolmente elevato.

⁶ Martin Kutta, 1867-1944, matematico tedesco, noto anche per il metodo numerico di soluzione delle equazioni differenziali (di Runge-Kutta). Nikolai Egorovich Joukovsky (o Zhukovsky), 1847-1921, matematico e fluidodinamico russo, fondatore della scuola russa di aerodinamica, formulò la prima teoria per il progetto delle superfici alari. Entrambi arrivarono indipendentemente alla formulazione del teorema, rispettivamente nel 1902 e nel 1906.

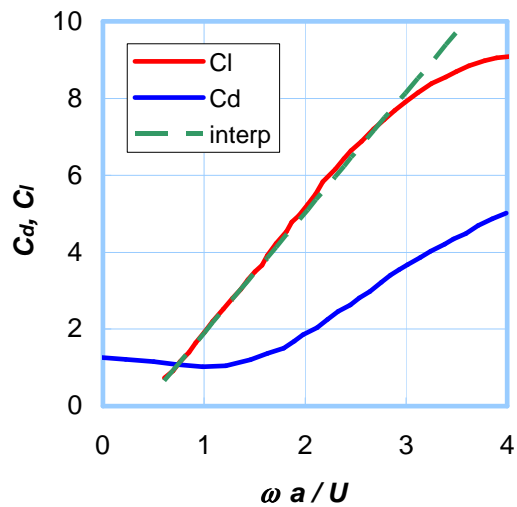


Figura 4.8: Effetto Magnus: coefficienti di resistenza e di portanza.

ESEMPIO 4.3 – Effetto Magnus.

Un flusso uniforme di aria (densità $\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$) investe ad una velocità $U = 5 \text{ m/s}$ un cilindro circolare di raggio $a = 0.4 \text{ m}$ e di altezza $b = 3 \text{ m}$. Se il cilindro ruota con una velocità $n = 200 \text{ rpm}$, valutare la forza portante e resistente con l'aiuto del diagramma di fig.4.8. Confrontare la forza portante con quella teorica, dovuta ad una circuitazione $\Gamma = 2 \pi \omega a^2$.

La velocità angolare del cilindro vale $\omega = 2 \pi n / 60 = 21 \text{ rad/s}$, per cui si ha $\omega a / U = 1.67$. Dal diagramma si ottiene approssimativamente $C_L = 4$, $C_D = 1.4$. Per cui, dalla (4.54) e dalla analoga per il drag si ha

$$|F_L| = C_L \frac{1}{2} \rho U_0^2 (2ba) = 148 \text{ N}$$

$$|F_D| = C_D \frac{1}{2} \rho U_0^2 (2ba) = 52 \text{ N}$$

La circuitazione massima teorica vale $2 \pi \omega a^2 = 21.1 \text{ m}^2/\text{s}$, e dalla (4.53) si avrebbe

$$|F_L| = \rho b U_0 \Gamma = 389 \text{ N (ovvero più del doppio di quella effettiva)}.$$

Una forza di 150 N è sufficiente per la propulsione di una piccola barca di 5 m. Bisogna considerare però che non appena la barca si muove il vento apparente (derivante dalla composizione della velocità del vento con quella di avanzamento della barca) cambia in direzione e modulo.

□

Moto assialsimmetrico attorno ad una sfera

Il moto attorno ad una sfera può essere descritto in un sistema di coordinate sferiche r, θ, ϕ , in cui, per le condizioni di assialsimmetria, la dipendenza da ϕ è nulla. Il potenziale risulta dalla sovrapposizione di un doppietto sferico ed il moto uniforme e si esprime come

$$\varphi = U_0 r \cos \theta + \frac{K}{4 \pi r^2} \cos \theta \quad (4.58)$$

mentre la funzione di corrente ha la forma

$$\Psi = \frac{U_0 r^2}{2} \sin^2 \theta - \frac{K}{4 \pi r} \sin^2 \theta \quad (4.59)$$

La costante K può essere ricavata, come nel caso del cilindro, imponendo che la velocità radiale sia nulla sulla superficie della sfera. Si ha pertanto

$$v_r|_{r=a} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \left(U_0 - \frac{2K}{4 \pi a^3} \right) \cos^2 \theta = 0 \quad \rightarrow \quad K = 2 \pi U_0 a^3 \quad (4.60)$$

Sostituendo il valore di K nelle (4.59) e (4.58) si può ricavare il valore della velocità

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = U_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = - \frac{U_0}{2} \left(2 + \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \end{aligned} \quad (4.61)$$

Possiamo adesso calcolare, analogamente a quanto fatto per il cilindro, il valore della velocità sulla superficie della sfera

$$v_{\theta}|_{r=a} = v_{\theta s} = -\frac{3}{2}U_0 \sin \theta \quad (4.62)$$

e la pressione alla superficie tramite l'equazione di Bernoulli, analogamente alla (4.40)

$$p - p_0 = \frac{1}{2}\rho U_0^2 \left(1 - \frac{9}{4}\sin^2 \theta\right) \quad (4.63)$$

Nei punti di ristagno e all'equatore si ha quindi, rispettivamente

$$\begin{aligned} \theta = 0^\circ, 180^\circ & \quad p - p_0 = \frac{1}{2}\rho U_0^2 \\ \theta = 90^\circ & \quad p - p_0 = -\frac{5}{4}\rho U_0^2 \end{aligned} \quad (4.64)$$

La velocità e la depressione sui fianchi di una sfera sono pertanto minori di quelle sui fianchi di un cilindro. Inoltre la “distorsione” del campo di velocità in prossimità della sfera rispetto al campo uniforme decresce con r^3 anziché con r^2 . Si potrebbe infine verificare che anche in questo caso la forza di drag sulla sfera è nulla, in accordo al paradosso di D'Alembert.

Il fatto che esista una zona di depressione lungo i fianchi di una sfera in moto spiega perché le bolle di gas che risalgono in un liquido sono ellissoidi allungati in direzione *perpendicolare* al moto.

BIBLIOGRAFIA

B.R. Munson, D.F. Young e T.H. Okihishi, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 4th ed., Wiley, 2002, cap.6.

R.L. Panton, *Incompressible Flow*, Wiley, 2005, capp.18 e 19.

F.M. White, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, 1994, cap.8.

G.K. Batchelor, *An introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge, 1973, cap.6.

D.D. Joseph, <http://www.aem.umn.edu/people/faculty/joseph/ViscousPotentialFlow>.

APPENDICE 4.1 – Il ruolo della viscosità nel moto potenziale.

E' un errore abbastanza comune identificare il moto potenziale come il moto di un fluido non viscoso: infatti nel moto potenziale gli effetti della viscosità non sono significativi, mentre d'altro canto un fluido ideale può esser soggetto ad un moto rotazionale, ad es. un vortice vero. Questa distinzione era peraltro ben chiara allo stesso Stokes. D.D. Joseph e collaboratori chiariscono estesamente il ruolo della viscosità in svariati tipi di moto potenziale, in diversi articoli riportati nel loro sito internet (vedi bibliografia), coniato per questa classe di moti col termine *Viscous Potential Flow*: in particolare, essi mostrano come il ruolo della dissipazione viscosa, che non si annulla in questo tipo di moto, può in alcuni casi essere molto significativo, e decresce all'aumentare del numero di Reynolds. Le considerazioni che seguono sono limitate al moto incomprimibile.

Abbiamo già visto come nel moto potenziale le tensioni viscosi, pur essendo autoequilibrate, non si annullano e danno luogo ad una dissipazione viscosa, v. Eqs. (4.12)-(4.14). La presenza di tale dissipazione ha tuttavia effetti limitati: infatti tutti i teoremi relativi al moto potenziale dei fluidi ideali si applicano ugualmente nel moto potenziale dei fluidi viscosi.

Per quanto riguarda l'equazione di Bernoulli, come mostrato nella sezione sulla vorticità del Cap.3, essa può essere scritta a partire dall'equazione di N-S nella forma:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} - \underline{v} \times \underline{\zeta} = - \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \psi + \frac{v^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \underline{v} = - \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \psi + \frac{v^2}{2} \right) + \nu \text{rot}(\underline{\zeta}) \quad (4.65)$$

Quindi, nel caso di moto stazionario con vorticità nulla, indipendentemente dal fatto che la viscosità sia nulla o meno, introducendo anche il potenziale ϕ essa si può scrivere come

$$\frac{p}{\rho} + \psi + \frac{(\text{grad } \phi)^2}{2} = 0 \quad (4.66)$$

e la pressione *idrostatica* nel fluido può essere calcolata in via algebrica. Ad essa si sovrappone però la pressione deviatorica, data dalle componenti diagonali della (4.12).

A prima vista, la validità dell'equazione di Bernoulli può sembrare insostenibile dal punto di vista energetico: infatti come può un fluido mantenere costante la sua energia totale in presenza di dissipazione? La contraddizione, come mostrato già da Stokes, è risolta dal fatto che il lavoro delle tensioni viscosi ai confini del dominio introduce nel sistema una energia meccanica per unità di tempo pari a quella distrutta dalla dissipazione viscosa.

Infine, la conseguenza di maggior rilievo della presenza di una dissipazione viscosa nel moto potenziale è che, anche in tale tipo di moto, un corpo tozzo è soggetto ad una forza resistente: come illustrato in precedenza, la potenza di tale forza bilancia la dissipazione viscosa. Questo permette di superare, seppure solo in parte, il paradosso di D'Alembert. Infatti, il moto potenziale non permette di imporre la condizione di no-slip alla parete, e quindi di considerare il campo effettivo di velocità in prossimità della parete e la dissipazione aggiuntiva dovuta alla vorticità nello strato limite ed, eventualmente, nella scia. La potenza totale della forza resistente deve quindi bilanciare la dissipazione viscosa nel moto potenziale, nello strato limite e nella scia. Si può vedere, come è logico aspettarsi, che il contributo della dissipazione viscosa nel moto potenziale diviene trascurabile rispetto agli altri due ad elevato numero di Reynolds: in questo contesto, il moto potenziale di un fluido viscoso diviene totalmente assimilabile a quello di un fluido ideale.

Il lettore interessato ad approfondire questi argomenti è indirizzato ai lavori di D.D. Joseph, ed in particolare D.D. Joseph, Potential flow of viscous fluids: historical notes, *International Journal of Multiphase Flow*, 32, 2006, pp. 285-310.