Appunti ed Esercizi di *Termofluidodinamica Applicata*

Capitolo 3.
Le equazioni di bilancio di massa, quantità di moto ed energia

Paolo Di Marco

Versione PRELIMINARE.10 – 23.10.2013.

L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.

Introduzione

Si ricorda che, come definito nel Cap.1, una proprietà di un sistema viene detta *estensiva* quando gode della *proprietà additiva*, ovvero il suo valore per l'intero sistema risulta dalla somma (ovvero dalla integrazione) dei valori che ha nelle varie parti che costituiscono il sistema stesso. Una proprietà estensiva, sotto le opportune ipotesi matematiche di regolarità, è quindi anche *integrabile*. Sono proprietà estensive ad esempio la massa, il volume, l'energia, la quantità di moto, l'entropia.
Nel presente capitolo viene introdotto il concetto di *equazione di bilancio di una proprietà estensiva*, che verrà in seguito applicato alle principali grandezze di interesse in termofluidodinamica, ed in particolare alla massa, alla quantità di moto e all'energia. Queste equazioni costituiscono la parte centrale del corso: nei capitoli seguenti, esse verranno opportunamente semplificate ed applicate allo studio dei sistemi fluidi, che rappresenta il nostro principale obbiettivo. Risulta quindi evidente che è necessario comprenderle in maniera approfondita. La comprensione del concetto di "bilancio", unita naturalmente alla capacità di metterlo in pratica nelle varie situazioni che si incontrano nella tecnica, costituisce inoltre, a parere di chi scrive, una delle abilità fondamentali dell'Ingegnere.
E' bene anche ricordare che le equazioni di bilancio sono indipendenti dal fluido considerato. Le ipotesi costituitive sul fluido vengono introdotte separatamente tramite le relazioni di chiusura.

GENERALITA' SUL BILANCIO DI UNA GRANDEZZA ESTENSIVA E TEOREMI CORRELATI

Per una qualunque proprietà *estensiva*, X, che quindi gode della proprietà additiva ed è integrabile, è possibile scrivere un'*equazione di bilancio* che si esprime generalmente nella forma:

Variazione nel tempo Δt di X = Quantità di X **generata** nel sistema nel tempo Δt
- Quantità di X **distrutta** nel sistema nel tempo Δt
+ Quantità di X **entrata** (per flusso o convezione) nel sistema nel tempo Δt
- Quantità di X **uscita** (per flusso o convezione) dal sistema nel tempo Δt

Per quanto riguarda gli ultimi due termini (entrata ed uscita) è possibile operare una ulteriore distinzione al loro interno: infatti la proprietà X può uscire dal sistema *fluendo* attraverso le pareti del sistema stesso oppure esserne *trasportata fuori* insieme alla massa uscente: nel primo caso si parla di *termine di flusso*, nel secondo *di termine di trasporto, o avvettivo, o convettivo* (dal latino *conveho*, trasporto insieme). Ad esempio, l'energia può uscire dal sistema attraverso le pareti (sotto forma di calore o lavoro) od esserne trasportata fuori insieme alla massa uscente, che porta via con sé la propria energia cinetica, potenziale ed interna.
Non sempre tutti i termini suddetti sono presenti. In particolare, valgono le regole seguenti, che consentono spesso di semplificare notevolmente l'equazione di bilancio:

- Se un sistema è in condizioni stazionarie, il termine di **variazione** è nullo: in particolare si annulla la derivata locale rispetto al tempo.

- Se un sistema è *isolato*, tutti i termini di **entrata ed uscita** sono nulli.
- Se un sistema è *chiuso*, i termini **avvettivi** sono nulli.
- Se una grandezza ammette un *principio di conservazione* (cioè non si crea né si distrugge) i termini di **generazione** o **distruzione**[1] sono per definizione nulli.

Il concetto di bilancio è applicabile non solo alle grandezze che abbiamo incontreremo in termofluidodinamica, ma anche, con modifiche non sostanziali, a grandezze non proprie della fisica purchè additive (ad es. al flusso di denaro, alla popolazione di un paese, alle diverse specie animali in un ecosistema …). A ben vedere, inoltre, il concetto di bilancio è *assiomatico*: in parole povere, noi *crediamo* che sia così, ma non possiamo dimostrarlo rigorosamente a partire da altri principi primi; saremmo invece in grado di *confutare* il concetto sulla base dei risultati della esperienza (il che, per ora, non si è mai verificato).

VARIE FORMULAZIONI DELLE EQUAZIONI DI BILANCIO

Come risulta dalla Tab.1, le equazioni di bilancio possono essere scritte nelle varie forme descritte nel seguito.

	Integrale	Differenziale o locale
Parametri concentrati	Massa di controllo Volume di controllo	
Parametri distribuiti	Massa di controllo Volume di controllo	Lagrangiano Euleriano

Tabella 1: formulazioni delle equazioni di bilancio.

Formulazione integrale: Le equazioni sono riferite ad un sistema che occupa una regione estesa dello spazio; i valori delle quantità oggetto di bilancio sono ottenute per integrazione sul volume del valore locale delle variabili massiche, e pertanto ne risultano generalmente equazioni integrodifferenziali. Questa formulazione può essere riferita ad un volume aperto (volume di controllo, *control volume* in inglese) o chiuso (volume materiale, o massa di controllo, *control mass* o talvolta anche semplicemente *system* in inglese).

Formulazione a parametri concentrati (*lumped parameter approach*): nel modello a parametri concentrati si eliminano tutti gli integrali supponendo che gli integrandi siano uniformi oppure sostituiti dal loro valore medio integrale, ignorando quindi la distribuzione spaziale delle variabili (quando questo non si verifica, si parla invece di *formulazione a parametri distribuiti*). Le risultanti equazioni sono già state utilizzate nel corso di Fisica Tecnica e Meccanica.

Formulazione differenziale o locale: le equazioni sono riferite ad un punto materiale (definito per i continui nel Cap.1) e sono quindi equazioni differenziali alle derivate parziali. Nella formulazione locale, è possibile adottare un punto di vista *euleriano*, ovvero di un sitema di riferimento non solidale con il fluido in moto, o *lagrangiano*, quando il sistema di

[1] detti anche di *sorgente* e *pozzo* (*source* and *sink* in inglese)

riferimento si muove solidalmente con la particella fluida.
Nel seguito vengono descritte in dettaglio le varie formulazioni per una generica quantità massica *c*, partendo dalla formulazione integrale che, ad avviso dell'autore, è la più intuitiva: la forma locale verrà derivata semplicemente da quella integrale applicando il teorema di Green. Naturalmente, è possibile anche il passaggio opposto.

LE EQUAZIONI INTEGRALI DI BILANCIO

Modello a parametri distribuiti

Dato un generico volume $V(t)$, la cui superficie di contorno chiusa $S(t)$ è in generale variabile nel tempo e detta $c(\underline{r},t)$ una generica variabile estensiva massica (scalare o vettoriale), possiamo impostare la *equazione generalizzata di bilancio integrale* come segue:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\, c\, \mathrm{d}V = -\oint\!\!\!\oint_S \rho\, c\left(\underline{v}-\underline{v}_s\right)\cdot \underline{n}\,\mathrm{d}S + \oint\!\!\!\oint_S \underline{J}\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S + \iiint_V \rho\,\Phi\,\mathrm{d}V \qquad (3.1)$$

variazione = avvezione + flusso + sorg./pozzo

Dove $\underline{v}$ rappresenta la velocità del fluido, $\underline{v}_S$ la velocità della superficie del sistema, $\underline{n}$ il versore normale alla superficie del sistema (orientato verso l'esterno), $\underline{J}$ il flusso di c attraverso la superficie del sistema (per unità di superficie e di tempo) e Φ la generazione/distruzione per unità di massa di c all'interno del sistema. La equazione suddetta è interpretabile come segue: la variazione nel tempo del contenuto di c all'interno del volume V, espressa dalla derivata nel primo membro, è dovuta alla quantità di c trasportata attraverso la superficie S del sistema dalla massa entrante ed uscente (primo termine a secondo membro), più il flusso di c attraverso la superficie S (secondo termine), più la generazione/distruzione di c per unità di tempo all'interno del sistema (terzo termine).

Per quanto ci interessa, la quantità c può essere sia scalare che vettoriale: Φ ha il suo stesso ordine (vale a dire è rispettivamente scalare o vettoriale) mentre J è di un ordine superiore (è rispettivamente un vettore od un tensore).

Può essere interessante notare esplicitamente che il termine ρc rappresenta il contenuto di c per unità di volume.

Facendo uso del teorema generale del trasporto, definito nel Cap.1, la (3.1) può essere riarrangiata nella forma

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, c)\,\mathrm{d}V + \oint\!\!\!\oint_S \rho\, c\, \underline{v}\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S = \oint\!\!\!\oint_S \underline{J}\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S + \iiint_V \rho\,\Phi\,\mathrm{d}V \qquad (3.2)$$

ed anche, sfruttando invece il teorema del trasporto nella forma di Reynolds (v. Cap.1) come

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint_{V_m} \rho\, c\,\mathrm{d}V = \oint\!\!\!\oint_S \underline{J}\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S + \iiint_{V_m} \rho\,\Phi\,\mathrm{d}V \qquad (3.3)$$

La forma (3.2) è particolarmente utile nei problemi *stazionari*, in cui la derivata locale dentro il primo integrale è, per definizione, nulla.
I valori delle quantità c, $\underline{J}$, Φ da sostituire nella equazione generalizzata di bilancio sono riportati in Tab. 2. Nel seguito vengono riportate alcune note riguardo ai bilanci a cui faremo

riferimento in questo corso, ovvero quelli di massa, quantità di moto ed energia.

Bilancio di massa

Per il bilancio di massa si ha ovviamente che la massa per unità di massa (c) è pari ad 1; altrettanto ovviamente, il flusso di massa non associato a flusso di massa ($\underline{J}$) è nullo; dato che assumiamo che la massa si conservi, il termine di generazione e distruzione Φ è anch'esso nullo. Pertanto, utilizzando la formulazione (3.1), il bilancio di massa diviene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V = -\oiint_S \rho\,(\underline{v}-\underline{v}_s)\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S \tag{3.4}$$

Si definiscono *portata in massa* e *portata in volume* attraverso una superficie S (non necessariamente chiusa) le quantità, rispettivamente

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \iint_S \rho\,(\underline{v}-\underline{v}_s)\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S \\ \dot{m}_v &= \iint_S (\underline{v}-\underline{v}_s)\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{3.5}$$

le quali rappresentano ovviamente il flusso di materia (in massa o volume) che attraversa la superficie suddetta. In base a questa definizione, la (3.4) può essere interpretata come: la variazione di massa per unità di tempo nel sistema uguaglia la somma algebrica delle portate attraverso le pareti.

Si definisce inoltre *velocità media di portata*, in base alla prima delle (3.5) la velocità

$$\overline{v} = \frac{\iint_S \rho\,(\underline{v}-\underline{v}_s)\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S}{\iint_S \rho\,\mathrm{d}S} \tag{3.6}$$

essa rappresenta il valore uniforme della velocità con cui il fluido dovrebbe attraversare la sezione S per garantire lo stesso flusso di massa attraverso essa.

Utilizzando invece la formulazione (3.2) il bilancio di massa diviene

$$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V + \oiint_S \rho\,\underline{v}\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S = 0 \tag{3.7}$$

ed infine, nella formulazione relativa ad un volume materiale

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint_{V_m} \rho\,\mathrm{d}V = 0 \tag{3.8}$$

Dalla (3.4), imponendo che la derivata temporale locale sia nulla, si può ottenere il bilancio di massa in caso stazionario

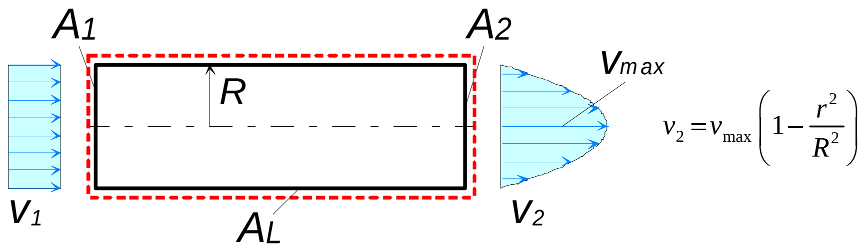
$$\oiint_S \rho\,\underline{v}\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S = 0 \tag{3.9}$$

che sancisce ovviamente che in tal caso il flusso globale di massa attraverso la superficie del sistema deve essere nullo (in caso di stazionario la velocità v_S della superficie del sistema è comunque nulla).

E' bene soffermarsi sulla sottile differenza tra la (3.8) e la (3.9): nella prima il flusso di massa è identicamente nullo in ogni punto della superficie del sistema, come deve essere per un volume materiale; nella seconda il flusso di massa sulla superficie è nullo *a livello integrale*, ovvero ci possono essere delle zone in cui la massa entra ed altre da cui ne esce altrettanta.

ESEMPIO 3.1 – Flusso laminare in sviluppo[2].

In un tubo circolare a sezione costante di raggio R, scorre un fluido incomprimibile; il profilo di velocità è uniforme in ingresso e parabolico in uscita (v. figura). Il sistema è stazionario. La velocità in uscita ha l'andamento (che, come verrà giustificato in seguito, è caratteristica del moto laminare pienamente sviluppato)



$$v_2 = v_{\max}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

Determinare, sulla base del bilancio di massa, il valore di v_{max} in funzione della velocità in ingresso.

Considerando il sistema delimitato dal confine tratteggiato in figura, il bilancio di massa in condizioni stazionarie è, dalla (3.7)

$$\oint\!\!\oint_S \rho\, \underline{v} \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}S = 0$$

Il prodotto scalare $\underline{v} \cdot \underline{n}$ è diverso da zero unicamente sulle sezioni di ingresso e di uscita, A_1 e A_2. Si ha quindi

$$\iint_{A_1} \rho\, \underline{v}_1 \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}S + \iint_{A_2} \rho\, \underline{v}_2 \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}S = 0$$

I vettori $\underline{v}$ ed $\underline{n}$ sono paralleli e discordi sulla superficie A_1, dove il fluido entra nel sistema, e paralleli e concordi sulla superficie A_2. Si ha quindi

$$\iint_{A_1} \rho\, v_1\, \mathrm{d}S = \iint_{A_2} \rho\, v_2\, \mathrm{d}S$$

ovvero, ricordando la definizione di portata in massa, $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$, la portata in ingresso è uguale a quella in uscita.

La densità del fluido è costante e può essere eliminata. Essendo il problema a simmetria circolare si ha

$$\int_0^R v_1\, 2\pi r\, \mathrm{d}r = \int_0^R v_{\max}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r\, \mathrm{d}r$$

da cui con semplici passaggi analitici

$$v_{\max} = 2 v_1$$

La velocità $v_1 = \dot{m} / \rho A_1$ è anche, in base alla (3.6), la *velocità media di portata*. Quindi, nel moto laminare pienamente sviluppato in un condotto circolare si ha che la velocità massima al centro del condotto è il doppio della velocità media di portata.

---

[2] tratto dal testo di Munson

❑

ESEMPIO 3.2 – Motore di aereo[3].

Un aereo si sposta alla velocità di v_1 = 970 km/h. Uno dei suoi motori turbofan ha i seguenti dati: area della sezione di ingresso A_1 = 0.8 m^2, area della sezione di uscita A_2 = 0.56 m^2, densità del fluido in ingresso ρ_1 = 0.74 kg/m^3, densità del fluido in uscita ρ_1 = 0.52 kg/m^3, velocità assoluta del fluido in uscita v_2 = 1050 km/h. Velocità e densità sono uniformi sulle sezioni di ingresso e di uscita ed il sistema è stazionario. Determinare la portata di combustibile entrante nel motore.

E' opportuno riformulare il problema in termini di velocità relative, che indichiamo col simbolo w. In particolare, essendo v_0 = 970/3.6 = 270 m/s, si ha, considerando un asse x positivo nella direzione del moto dell'aereo

$$w_1 = -v_0 = -270\,\mathrm{m/s}$$

$$w_2 = v_2 - v_0 = -561\,\mathrm{m/s}$$

Il bilancio di massa, eq.(3.7) nel caso di sistema stazionario diviene

$$\oiint_S \rho\, \underline{w} \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}S = 0$$

Il prodotto scalare $\underline{w} \cdot \underline{n}$ è diverso da zero solo in corrispondebza delle aperture di ingresso e di uscita dell'aria e in quella di ammissione del combustibile, che indichiamo con A_f. Si ha pertanto

$$\iint_{A_1} \rho_1\, \underline{w}_1 \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}S + \iint_{A_2} \rho_2\, \underline{w}_2 \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}S + \iint_{A_f} \rho_f\, \underline{w}_f \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}S = 0$$

dove si è tenuto conto che il prodotto scalare $\underline{w} \cdot \underline{n}$ è positivo sulla bocca di uscita e negativo su quella di entrata. Si può anche porre direttamente

$$\iint_{A_1} \rho_1\, \underline{w}_1 \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}S = -\dot{m}_1$$

$$\iint_{A_2} \rho_2\, \underline{w}_2 \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}S = \dot{m}_2$$

$$\iint_{A_f} \rho_f\, \underline{w}_f \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}S = -\dot{m}_f$$

dove i segni negativo corrispondono alle portate entranti. Sostituendo i valori, abbiamo

$$\dot{m}_1 = 158\,\mathrm{kg/s} = 570\,\mathrm{t/h}$$

$$\dot{m}_2 = 162.5\,\mathrm{kg/s} = 579\,\mathrm{t/h}$$

$$\dot{m}_f = 4.5\,\mathrm{kg/s} = 16.2\,\mathrm{t/h}$$

Da cui si vede che la portata di combustibile è trascurabile rispetto alle altre, e si può ritenere con buona approssimazione $\dot{m}_1 \cong \dot{m}_2$.

❑

Bilancio di quantità di moto

La quantità di moto per unità di massa è rappresentata da $m\underline{v}/m = \underline{v}$, ovvero dalla velocità, ed è una quantità vettoriale. Il secondo principio della dinamica ci dice che la variazione della quantità di moto è dovuta alle forze applicate. Di conseguenza il termine di flusso sarà dato dalla risultante delle forze di superficie, ovvero dall'integrale sulla superficie del sistema delle

[3] tratto dal testo di Munson

forze per unità di superficie applicate, che a loro volta, definito il tensore di Cauchy $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}}$, sono date, in accordo a quanto esposto nel Cap.1, da $\underline{t} = \left(\underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}}\right)\cdot \underline{n}$. Quindi, il tensore di Cauchy può essere interpretato come flusso di quantità di moto[4], e dunque $\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}}$. A queste va aggiunta la risultante delle forze di volume, ovvero l'integrale esteso al volume considerato delle forze per unità di volume $\underline{f}$ = ρ$\underline{f}$'. Pertanto, utilizzando la formulazione (3.1), si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\, \underline{v}\, \mathrm{d}V + \oiint_S \rho\, \underline{v}\left[\left(\underline{v} - \underline{v}_s\right)\cdot \underline{n}\right]\mathrm{d}S = \oiint_S \left(\underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}}\right)\cdot \underline{n}\,\mathrm{d}S + \iiint_V \rho\, \underline{f}\,'\mathrm{d}V \quad (3.10)$$

Utilizzando invece la formulazione (3.2), il bilancio di quantità di moto diviene

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, \underline{v})\,\mathrm{d}V + \oiint_S \rho\, \underline{v}\left(\underline{v}\cdot \underline{n}\right)\mathrm{d}S = \oiint_S \left(\underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}}\right)\cdot \underline{n}\,\mathrm{d}S + \iiint_V \rho\, \underline{f}\,'\mathrm{d}V \quad (3.11)$$

da cui, imponendo che la derivata temporale locale sia nulla, si può ottenere il bilancio di quantità di moto in caso stazionario

$$\oiint_S \rho\, \underline{v}\left(\underline{v}\cdot \underline{n}\right)\mathrm{d}S = \oiint_S \left(\underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}}\right)\cdot \underline{n}\,\mathrm{d}S + \iiint_V \rho\, \underline{f}\,'\mathrm{d}V \quad (3.12)$$

in cui compare ancora un termine avvettivo a primo membro (responsabile, ad esempio, della propulsione a reazione di un aereo).
Nella formulazione riferita ad un volume materiale, ovvero la (3.3), si ha infine

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint_{V_m} \rho\, \underline{v}\, \mathrm{d}V = \oiint_S (\underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}})\cdot \underline{n}\,\mathrm{d}S + \iiint_{V_m} \rho\, \underline{f}\,'\mathrm{d}V \quad (3.13)$$

Tutte le equazioni suddette sono vettoriali ovvero rappresentano in forma compatta tre equazioni scalari nelle componenti della velocità. Ad esempio, la componente lungo *x* della (3.11) si scrive

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, v_x)\,\mathrm{d}V + \oiint_S \rho\, v_x\left(\underline{v}\cdot \underline{n}\right)\mathrm{d}S = \oiint_S \underline{i}\cdot\left(\underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}}\right)\cdot \underline{n}\;\mathrm{d}S + \iiint_V \rho\, \underline{f}\,'\cdot \underline{i}\,\mathrm{d}V \quad (3.14)$$

dove vale la pena di notare che il prodotto scalare $\underline{v}\cdot\underline{n}$, contenuto nel termine avvettivo, rimane inalterato.

ESEMPIO 3.3 – Motore di aereo.
Con riferimento all'esempio 3.2, calcolare la spinta esercitata dal motore.

Il bilancio di q.d.m., Eq.(3.11), scritto per la sola componente su *x* nel caso di sistema stazionario, diviene

$$\oiint_S \rho\, w_x\, \underline{w}\cdot \underline{n}\,\mathrm{d}S = 0$$

Dove con F_x si è indicata la risultante lungo *x* delle forze di superficie agenti sulla carcassa del motore, dato dalla spinta esercitata dal supporto sul motore più la risultante delle forze di taglio agenti sulla superficie esterna (metallica) del motore. Dette forze, se considerate,

[4] Essendo in questo caso la quantità *c* un vettore, la quantità $\underline{\underline{J}}$, superiore di un ordine, diviene un *tensore*. Il simbolo $\underline{\underline{J}}$ è già stato utilizzato nel Cap.2 per il tensore jacobiano, con cui il presente non ha nulla a che vedere.

riducono la spinta esercitata sul supporto. Si è anche trascurato l'apporto di quantità di moto del combustibile, ritenendo che esso venga introdotto in direzione perpendicolare al moto: se così non fosse, il contributo sarebbe comunque trascurabile. Infine, abbiamo supposto la pressione esterna pari ovunque al valore atmosferico, e quindi con risultante nulla.
Riducendo l'intergrale di superficie alle sole aperture di ingresso e di uscita (essendo altrove il prodotto $\underline{w} \cdot \underline{n}$ nullo) e tenuto conto che

$$\underline{w}_1 \cdot \underline{n} = -w_{x1} \qquad , \qquad \underline{w}_2 \cdot \underline{n} = w_{x2}$$

si ha

$$-\iint_{A_1} \rho_1 w_1^2 \,\mathrm{d}S + \iint_{A_2} \rho_2 \underline{w}_2^2 \,\mathrm{d}S = F_x$$

e dato che le densità e le velocità sono costanti, integrando e ricordando la definizione di portata

$$-\dot{m}_1 w_1 + \dot{m}_2 w_2 = F_x$$

a questo punto bisogna ricordare (v. esempio 3.2) che le due portate sono pressochè uguali, e le componenti di velocità relativa sono negative in quando dirette in direzione opposta all'asse *x*, per cui passando ai valori assoluti e sostituendo i dati già ottenuti nell'esempio 3.2

$$\dot{m} \left(\left|w_1\right| - \left|w_2\right|\right) = F_x = -47 \text{ kN } (-4.7 \text{ t})$$

Che è la classica formula per il calcolo della spinta nei motori a reazione. La spinta esercitata sul motore (essendo $\left|w_1\right| < \left|w_2\right|$) è pertanto negativa; conseguentemente la spinta esercitata sul supporto sarà positiva, ovvero diretta in avanti. La spinta di un moderno motore aereo (Airbus A380) può arrivare a 320 kN (32 t). La spinta massima dei motori di un moderno jet oscilla indicativamente tra il 25 ed il 40% del peso del velivolo.
❑

Bilancio di energia

Nel bilancio di energia, assumiamo che la quantità *c* sia data dalla cosiddetta *energia di ristagno*, somma dell' energia interna più l'energia cinetica (entrambe per unità di massa)

$$c = u_0 = u + \frac{v^2}{2} \tag{3.15}$$

Il flusso di energia è rappresentato dal flusso termico $\underline{q}'' \cdot \underline{n}$ (con segno negativo perché l'energia aumenta quando il flusso è entrante, ovvero diretto in verso contrario alla normale $\underline{n}$) più la potenza delle forze di superficie ($\underline{t} \cdot \underline{v}$). Nel termine di sorgente volumetrica, bisogna considerare la potenza delle forze di massa, $\rho\, \underline{f}' \cdot \underline{v}$. A tale termine va aggiunto infine anche un termine di generazione/distruzione dell'energia per unità di volume, *q'''*: infatti, pur ipotizzando che l'energia si conservi, abbiamo fatto il bilancio della sola energia di ristagno, per cui l'energia introdotta nel sistema ad es. da reazioni chimiche o nucleari si deve considerare "creata" all'interno del sistema; tale termine sarebbe invece nullo se tutte le forme di energia (energia chimica, nucleare, elettrica, magnetica etc.) fossero incluse nel termine *c* a primo membro.
Pertanto, utilizzando le formulazioni (3.1) e (3.2), il bilancio di energia diviene rispettivamente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\, u_0\,\mathrm{d}V + \oiint_S \rho u_0\left(\underline{v}-\underline{v}_s\right)\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S = \\ = \oiint_S\left[-\underline{q}''+\left(\underline{\underline{T}}-p\underline{\underline{I}}\right)\cdot\underline{v}\right]\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S + \iiint_V\left(q'''+\rho\,\underline{f}'\cdot\underline{v}\right)\mathrm{d}V \tag{3.16}$$

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_0)\,\mathrm{d}V + \oiint_S \rho u_0\left(\underline{v}\cdot\underline{n}\right)\mathrm{d}S = \\ = \oiint_S\left[-\underline{q}''+\left(\underline{\underline{T}}-p\underline{\underline{I}}\right)\cdot\underline{v}\right]\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S + \iiint_V\left(q'''+\rho\,\underline{f}'\cdot\underline{v}\right)\mathrm{d}V \tag{3.17}$$

dove si è tenuto conto che

$$\underline{t}\cdot\underline{v} = \left[\left(\underline{\underline{T}}-p\underline{\underline{I}}\right)\cdot\underline{n}\right]\cdot\underline{v} = \left(\underline{\underline{T}}-p\underline{\underline{I}}\right)\cdot\underline{v}\cdot\underline{n} \tag{3.18}$$

Dalla (3.17), imponendo che la derivata temporale locale sia nulla, si può ottenere il bilancio di energia in caso stazionario.

$$\oiint_S \rho u_0\left(\underline{v}\cdot\underline{n}\right)\mathrm{d}S = \oiint_S\left[-\underline{q}''+\left(\underline{\underline{T}}-p\underline{\underline{I}}\right)\cdot\underline{v}\right]\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S + \iiint_V\left(q'''+\rho\,\underline{f}'\cdot\underline{v}\right)\mathrm{d}V \tag{3.19}$$

E per concludere, il bilancio di energia riferito ad un volume materiale si esprime come:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint_{V_m} \rho\, u_0\,\mathrm{d}V = \oiint_S\left[-\underline{q}''+\left(\underline{\underline{T}}-p\underline{\underline{I}}\right)\cdot\underline{v}\right]\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S + \iiint_{V_m}\left(q'''+\rho\,\underline{f}'\cdot\underline{v}\right)\mathrm{d}V \tag{3.20}$$

I bilanci suddetti, (3.16), (3.17) e (3.20) vengono generalmente detti *bilanci di energia totale*, anche se sarebbe più giusto definirli bilanci di energia *di ristagno*, in quanto abbiamo considerato unicamente l'energia termica e meccanica ed alcune forme di energia sono comunque esclusi da essi.

Discuteremo in seguito nella sezione di bilanci locali altre forme di equazioni di bilancio dell'energia, in particolare quelli dell'energia cinetica, interna e dell'entalpia, tutti derivabili dalla (3.17), per evitare una formulazione matematica troppo pesante. Ci limitiamo qui ad esprimere la (3.19) in una forma leggermente diversa, in cui compare l'entalpia nel termine avvettivo. Espandendo gli integrali a secondo membro nella (3.16)si ottiene infatti

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\, u_0\,\mathrm{d}V + \oiint_S \rho u_0\left(\underline{v}-\underline{v}_s\right)\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S = \\ = -\oiint_S \underline{q}''\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S + \iiint_V q'''\,\mathrm{d}V - \oiint_S p\,\underline{v}\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S + \oiint_S \underline{\underline{T}}\cdot\underline{n}\cdot\underline{v}\,\mathrm{d}S + \iiint_V \rho\,\underline{f}'\cdot\underline{v}\,\mathrm{d}V \tag{3.21}$$

e portando a primo membro il termine che contiene la pressione, con semplici passaggi[5]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\, u_0\,\mathrm{d}V + \oiint_S \rho\left(u_0+\frac{p}{\rho}\right)\left(\underline{v}-\underline{v}_s\right)\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S + \oiint_S p\,\underline{v}_s\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S = \\ = -\oiint_S \underline{q}''\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S + \iiint_V q'''\,\mathrm{d}V + \oiint_S \underline{\underline{T}}\cdot\underline{n}\cdot\underline{v}\,\mathrm{d}S + \iiint_V \rho\,\underline{f}'\cdot\underline{v}\,\mathrm{d}V \tag{3.22}$$

introducendo l'*entalpia di ristagno*, $h_0 = u_0 + p/\rho$, si ottiene infine

[5] Si ricordi che tutti i prodotti scalari che compaiono negli integrali sono commutativi.

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\, u_0\, \mathrm{d}V}_{\text{variazione}} + \underbrace{\oiint_S \rho\, h_0 \left(\underline{v}-\underline{v}_s\right)\cdot \underline{n}\, \mathrm{d}S}_{\text{avvezione}} =$$

$$= \underbrace{-\oiint_S \underline{q}''\cdot \underline{n}\,\mathrm{d}S}_{\text{flusso termico}} \; + \underbrace{\iiint_V q'''\,\mathrm{d}V}_{\text{sorg. termica volum.}} \; \underbrace{-\oiint_S p\,\underline{v}_s\cdot \underline{n}\,\mathrm{d}S}_{\text{lavoro dilataz.}} \; + \underbrace{\oiint_S \underline{\underline{T}}\cdot\underline{n}\cdot\underline{v}\,\mathrm{d}S}_{\text{lavoro forze deviatoriche}} + \underbrace{\iiint_V \rho\, \underline{f}'\cdot\underline{v}\,\mathrm{d}V}_{\text{lavoro forze massa}} \tag{3.23}$$

in cui è riportato il significato fisico dei termini (il lavoro è inteso per unità di tempo). Si nota che l’apporto avvettivo dell’energia è caratterizzato meglio dall’entalpia anziché dall’energia interna: cosa del resto ben nota anche dai bilanci di energia per i sistemi aperti, utilizzati a suo tempo in Fisica Tecnica.

E’ bene infine fare presente che nelle formulazioni qui adottate generalmente si assume che le componenti del tensore di Cauchy siano *continue attraverso la superfice del sistema*: ad esempio che la pressione sulla faccia interna del volume di controllo sia pari a quella esterna. Nel caso che questo non avvenga, occorre considerare le componenti *esterne* al volume: in particolare, nel caso di un volume di controllo che si espande nel vuoto (l’esplosione di un’astronave nello spazio, ad esempio[6]) il lavoro di dilatazione è, ovviamente, nullo.

Formulazione generale delle equazioni di bilancio

Riassumendo, le equazioni integrali di bilancio possono essere espresse in generale nelle forme (3.1), (3.2) o (3.3). Le quantità c, $\underline{J}$ e Φ da introdurvi (incluse in quelle, qui non trattate, del momento della quantità di moto e dell’entropia) sono riportate in dettaglio in Tab.2. Come già accennato, i bilanci di energia cinetica, interna ed entalpia verranno trattati in seguito.

	c	$\underline{J}$	Φ
Massa	1	0	0
Quantità di moto	$\underline{v}$	$\underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}}$	$\underline{f}'$
Momento di q. moto	$\underline{r} \times \underline{v}$	$\underline{r} \times \left(\underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}}\right)$	$\underline{r} \times \underline{f}'$
Energia totale	$u_0 = u + \dfrac{v^2}{2}$	$-\underline{q}'' + \left(\underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}}\right)\cdot\underline{v}$	$\dfrac{q'''}{\rho} + \underline{f}'\cdot\underline{v}$
Energia cinetica	$\dfrac{v^2}{2}$	$\left(\underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}}\right)\cdot\underline{v}$	$\underline{f}'\cdot\underline{v} + \dfrac{p}{\rho}\operatorname{div}\underline{v} - \dfrac{\varphi}{\rho}$
Energia interna	u	$-\underline{q}''$	$\dfrac{q'''}{\rho} - \dfrac{p}{\rho}\operatorname{div}\underline{v} + \dfrac{\varphi}{\rho}$
Entalpia	h	$-\underline{q}''$	$\dfrac{q'''}{\rho} + \dfrac{\varphi}{\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{Dp}{Dt}$

[6] Un caso, per adesso, di maggiore rilevanza pratica è costituito dal caso di un’interfaccia curva, es. di una bolla di vapore in un liquido, in cui la pressione all’esterno e all’interno dell’interfaccia differiscono a causa della tensione superficiale: in questo caso però, se si considera la pressione esterna, bisogna aggiungere l’energia superficiale nel bilancio.

Entropia	s	$\dfrac{-\underline{q}''}{T_s}$	$\dot{S}_{irr}$

Tabella 2: valori delle quantità c, $\underline{J}$, Φ da sostituire nella equazione generalizzata di bilancio.

Modello a parametri concentrati

Nel modello a parametri concentrati si eliminano tutti gli integrali supponendo che gli integrandi siano uniformi, oppure sostituiti dal loro valore medio integrale. Le risultanti equazioni possono essere ricavate facilmente dalle (3.4), (3.11), (3.17); esse sono già state utilizzate nel corso di Fisica Tecnica e Meccanica e sono riportate in dettaglio nel cap.4 del Todreas-Kazimi. A titolo di esempio si riporta qui solo l'equazione di bilancio della quantità di moto, ottenibile dalla (3.13) per un volume materiale che trasla (ovvero in cui $\underline{v}$ non dipende da $\underline{r}$)

$$m\frac{\mathrm{D}\underline{v}}{\mathrm{D}t} = \sum_S \underline{F}_S + \sum_V \underline{F}_V \qquad (3.24)$$

che non è altro che il secondo principio della dinamica (la risultante delle forze esterne è pari alla variazione della quantità di moto) come formulato nei corsi di Fisica, in altri termini $\underline{F} = m\,\underline{a}$, dove $\underline{F}$ è la risultante delle forze di volume e di superficie,

IL CASO DI FORZE DI MASSA CONSERVATIVE: L'ENERGIA POTENZIALE

Qualora le forze di massa siano conservative si può, come è noto, affermare che

$$\underline{f}' = -\,\mathrm{grad}\,\psi \qquad (3.25)$$

dove ψ è detta *energia potenziale*[7]. Si ha quindi che

$$\iiint_V \rho\,\underline{f}'\cdot\underline{v}\,\mathrm{d}V = -\iiint_V \rho\,\underline{v}\cdot\mathrm{grad}\,\psi\,\mathrm{d}V \qquad (3.26)$$

ma si ha anche

$$\rho\,\underline{v}\cdot\mathrm{grad}\,\psi = \mathrm{div}(\rho\,\psi\,\underline{v}) - \psi\,\mathrm{div}(\rho\,\underline{v}) = \mathrm{div}(\rho\,\psi\,\underline{v}) + \psi\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (3.27)$$

dove si è sfruttato il bilancio locale di massa, $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\,\underline{v}) = 0$, che verrà formalmente introdotto in seguito, eq. (3.36), per trasformare il secondo termine. Sostituendo ora la (3.27) nella (3.26), sfruttando il teorema della divergenza e quello del trasporto, e supponendo inoltre che ψ sia indipendente dal tempo ($\partial\psi/\partial t$=0), si ottiene

$$\begin{aligned}
\iiint_V \rho\,\underline{f}'\cdot\underline{v}\,\mathrm{d}V &= -\iiint_V \mathrm{div}(\rho\,\psi\,\underline{v})\,\mathrm{d}V - \iiint_V \psi\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V = \\
&= -\iiint_V \mathrm{div}(\rho\,\psi\,\underline{v})\,\mathrm{d}V - \iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi)\,\mathrm{d}V = \\
&= -\oiint_S \rho\,\psi\,\underline{v}\cdot\underline{n}\mathrm{d}S - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\psi\;\mathrm{d}V + \oiint_S \rho\,\psi\,\underline{v}_s\cdot\underline{n}\mathrm{d}S = \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\psi\;\mathrm{d}V - \oiint_S \rho\,\psi\,(\underline{v} - \underline{v}_s)\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S
\end{aligned} \qquad (3.28)$$

A meno del segno, il secondo membro è un termine analogo a quello che compare a primo membro nella (3.1), con $c = \psi$. In particolare, il segno negativo scompare quando esso viene trasferito a primo membro dell'equazione suddetta.
In sostanza, si può concludere che, quando f' è conservativa, la si può considerare come termine di sorgente Φ nell'integrale di volume a secondo membro, <u>*oppure*</u> si può aggiungere la sua *energia potenziale* al termine c a primo membro, ma *non*, ovviamente, entrambe le cose! Questa possibilità, del resto, è nota a partire dal corso di Fisica, dove nei bilanci di energia meccanica si considera alternativamente la forza peso come una forza esterna, *oppure* si include la sua energia potenziale nell'equazione.

[7] Si ricorda che *energia potenziale* e *potenziale* differiscono unicamente per il segno.

LE EQUAZIONI LOCALI DI BILANCIO

Consideriamo di nuovo l'equazione di bilancio integrale nella forma (3.2)

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, c)\,\mathrm{d}V + \oiint_S \rho\, c\, \underline{v}\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S = \oiint_S \underline{J}\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S + \iiint_V \rho\,\Phi\,\mathrm{d}V \qquad (3.29)$$

Applicando il teorema di Green, gli integrali di superficie possono essere convertiti in integrali di volume per ottenere

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, c)\,\mathrm{d}V + \iiint_V \mathrm{div}(\rho c\,\underline{v})\,\mathrm{d}V = \iiint_V \mathrm{div}\,\underline{J}\,\mathrm{d}V + \iiint_V \rho\,\Phi\,\mathrm{d}V \qquad (3.30)$$

Essendo il volume *V* arbitrario, ne segue l'uguaglianza degli integrandi

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, c) + \mathrm{div}(\rho\, c\,\underline{v}) = \mathrm{div}\underline{J} + \rho\,\Phi \qquad (3.31)$$

dove ovviamente le quantità c, $\underline{J}$, Φ sono sempre quelle riportate nella Tab.2.
Espandendo la derivata e la divergenza a primo membro, tenuto conto che

$$\mathrm{div}(\rho\, c\,\underline{v}) = c\ \mathrm{div}(\rho\,\underline{v}) + \rho\,\underline{v}\cdot\mathrm{grad}\,c \qquad (3.32)$$

otteniamo

$$\rho\frac{\partial c}{\partial t} + c\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\,\underline{v})\right] + \rho\,\underline{v}\cdot\mathrm{grad}\,c = \mathrm{div}\underline{J} + \rho\,\Phi \qquad (3.33)$$

Anticipiamo che, sfruttando il bilancio locale di massa, si ottiene che il termine $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\,\underline{v})$ è identicamente nullo, vedi successiva eq.(3.36). Pertanto la (3.33) può essere alternativamente espressa (ad eccezione del bilancio di massa[8]) come

$$\rho\frac{\partial c}{\partial t} + \rho\,\underline{v}\cdot\mathrm{grad}\,c = \mathrm{div}\,\underline{J} + \rho\,\Phi \qquad (3.34)$$

che rappresenta la *formulazione locale euleriana*, ovvero (ricordando il legame tra derivata euleriana e lagrangiana) come

$$\rho\frac{\mathrm{D}c}{\mathrm{D}t} = \mathrm{div}\,\underline{J} + \rho\,\Phi \qquad (3.35)$$

che è la *forma locale lagrangiana*.

Bilancio locale di massa

Utilizzando la Tab.2, e sostituendo nella (3.31) il bilancio di massa può essere scritto nella forma euleriana

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\,\underline{v}) = 0 \qquad \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}}\right] \qquad (3.36)$$

[8] Per il bilancio di massa la (3.34) è una identità (0=0), a differenza della (3.31).

da cui, espandendo la divergenza

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{v} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0 \tag{3.37}$$

e combinando i primi due termini nella derivata materiale della densità, si ottiene la forma lagrangiana

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0 \tag{3.38}$$

In un sistema a regime, in generale dalla (3.36) si ha

$$\operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0 \tag{3.39}$$

Infine per un fluido incomprimibile si ha ρ = cost, quindi, alternativamente dalla (3.36) o dalla (3.38) si ottiene l'identità

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0 \tag{3.40}$$

che è coerente con il fatto, esposto nel cap.1, che div $\underline{v}$ rappresenta la velocità di dilatazione del sistema. E' da notare che la (3.40) è valida, per fluidi incomprimibili, anche nel caso di moto non stazionario.

Bilancio locale di quantità di moto – Equazioni di Eulero e di Navier-Stokes

La formulazione generale del bilancio locale della quantità di moto, in forma euleriana, si ottiene sostituendo i termini dati in Tab.2 nella (3.34)

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \operatorname{grad} \underline{v} = \operatorname{div}\left(\underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}}\right) + \rho \underline{f}' \quad \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}\right] \tag{3.41}$$

ovvero nella corrispondente forma lagrangiana, già ottenuta nel Cap.1 come equazione indefinita di Cauchy

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = \rho \underline{a} = \operatorname{div}\left(\underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}}\right) + \rho \underline{f}' \tag{3.42}$$

In entrambe le precedenti equazioni, $\underline{\underline{T}}$ rappresenta il tensore deviatorico di Cauchy. si nota che il primo termine a secondo membro può anche essere espresso come[9]

$$\operatorname{div}\left(\underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}}\right) = \operatorname{div} \underline{\underline{T}} - \operatorname{grad} p \tag{3.43}$$

per cui, ad esempio

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div} \underline{\underline{T}} + \rho \underline{f}' \tag{3.44}$$

L'equazione precedente mostra chiaramente a secondo membro le forze che governano il moto di un continuo: il gradiente di pressione (e non la pressione assoluta), le forze deviatoriche e le forze di massa.

[9] a secondo membro della (3.43)sia la divergenza di un tensore che il gradiente di uno scalare sono *vettori*.

Bisogna fare attenzione che sia la (3.41) che la (3.42) sono equazioni vettoriali; in particolare, tenendo presente la definizione di gradiente di un vettore data nel Cap.1, la componente lungo *x* della (3.41) si scrive come

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho\, \underline{v} \cdot \mathrm{grad}\, v_x = \left(\mathrm{div}\, \underline{\underline{T}} \cdot \underline{i}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho\, f_x'$$
$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho\, f_x' \qquad (3.45)$$

e analoghe lungo *y* e lungo *z*.

Bilancio di quantità di moto per un fluido ideale.

Un fluido ideale (o non viscoso, detto anche, con una brutta traduzione dall'inglese, inviscido) non trasmette in nessuna condizione tensioni deviatoriche. Pertanto il tensore deviatorico degli sforzi, $\underline{\underline{T}}$, è identicamente nullo. Le(3.41) e (3.42) divengono pertanto rispettivamente

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho\, \underline{v} \cdot \mathrm{grad}\, \underline{v} = -\,\mathrm{grad}\, p + \rho\, \underline{f}' \qquad \text{(fluido ideale)} \qquad (3.46)$$

$$\rho \frac{D \underline{v}}{D t} = -\,\mathrm{grad}\, p + \rho\, \underline{f}' \qquad \text{(fluido ideale)} \qquad (3.47)$$

dette[10] anche *equazioni di Eulero*, in quanto da lui derivate nel 1755.

Bilancio di quantità di moto per un fluido newtoniano incomprimibile: equazioni di Navier-Stokes.

Applichiamo il bilancio di quantità di moto ad un fluido newtoniano con viscosità uniforme. In tal caso valgono la relazione ricavata nel Cap.2, che esprime le componenti del tensore deviatorico di Cauchy

$$\tau_{ij} = 2\mu\, d_{ij} - \frac{2}{3}\mu\, \delta_{ij}\, \mathrm{div}\, \underline{v} = 2\mu\, d_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\mu\, \delta_{ij}\, \mathrm{div}\, \underline{v} \qquad (3.48)$$

nella seconda, per ora, il termine div $\underline{v}$ è stato conservato per maggiore generalità. Sostituendo nella (3.42) e supponendo la viscosità μ uniforme, si ottiene per la componente *x*, v. anche la (3.45)

$$\rho \frac{D v_x}{D t} = \mu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mathrm{div}\, \underline{v} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho\, f_x' \qquad (3.49)$$

Semplificando le derivate e raccogliendo, con un po' di pazienza si ottiene

[10] con poca fantasia, si potrebbe dire, dato che la fisica è piena di equazioni di Eulero …

$$
\begin{aligned}
\rho \frac{D v_x}{D t} &= \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x' \\
\rho \frac{D v_x}{D t} &= \mu \left[\nabla^2 v_x + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathrm{div}\, \underline{v} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x'
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

Analoghe espressioni possono essere ottenute per le componenti *y* e *z*, per cui infine si ha in forma vettoriale

$$
\rho \frac{D \underline{v}}{D t} = \mu \nabla^2 \underline{v} - \mathrm{grad}\, p + \rho \underline{f}' + \frac{1}{3} \mu\, \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, \underline{v}) \tag{3.51}
$$

per un fluido incomprimibile, tenuto conto che (3.40) si ha div $\underline{v}$ = 0

$$
\rho \frac{D \underline{v}}{D t} = \mu \nabla^2 \underline{v} - \mathrm{grad}\, p + \rho \underline{f}' \tag{3.52}
$$

che sono dette *equazioni di Navier-Stokes*. Tali equazioni, come anticipato, non sono altro che l'applicazione del bilancio locale di quantità di moto ad un fluido incomprimibile, newtoniano e di viscosità uniforme.[11]

In forma euleriana le (3.52) divengono

$$
\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho\, \underline{v} \cdot \mathrm{grad}\, \underline{v} = -\mathrm{grad}\, p + \mu \nabla^2 \underline{v} + \rho \underline{f}' \tag{3.53}
$$

dove appare chiaramente la loro *non-linearità*, presente nel termine $\rho\, \underline{v} \cdot \mathrm{grad}\, \underline{v}$. Nella classificazione generale delle equazioni differenziali, le equazioni di N-S sono pertanto *equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari*.

Le equazioni differenziali alle derivate parziali sono classificate (mediante un criterio troppo lungo da esporre qui) in iperboliche, paraboliche, ellittiche. In particolare, le equazioni di NS sono *ellittiche* nel caso stazionario (derivata rispetto al tempo nulla) e *paraboliche* in condizioni transitorie. Le equazioni ellittiche descrivono fenomeni stazionari (la più famosa è l'equazione di Laplace, $\nabla^2 u = 0$, che descrive una vasta classe di fenomeni fisici), in cui una perturbazione locale si propaga in tutte le direzioni a velocità infinita, mentre le equazioni paraboliche sono caratteristiche dei fenomeni diffusivi: in questo caso le perturbazioni si propagano solo in avanti nel tempo. L'equazione di Fourier è un altro esempio di equazione parabolica, nel caso non stazionario. Per maggiori dettagli sulla classificazione delle equazioni differenziali si veda ad esempio il testo di Fletcher, cap.2.

Per comprendere il ruolo del termine viscoso bisogna ricordare, come esposto nel Cap.1, che quando il laplaciano è minore di zero la velocità ha un valore locale che è superiore alla media dei valori circostanti: in questo caso la diffusione di quantità di moto tende a rallentare il fluido; il contrario avviene, ovviamente, quando il laplaciano è maggiore di zero, e la velocità locale è inferiore alla media delle velocità circostanti. In altri termini, la diffusione viscosa

[11] Sul termine "equazioni di N-S" c'è in realtà un po' di ambiguità da testo a testo: alcuni attribuiscono tale nome semplicemente al bilancio di q.d.m. per un fluido newtoniano. Le forme intermedie (fluido newtoniano comprimibile, fluido newtoniano comprimibile con viscosità variabile) sono riportate nel Cap.4 del Todreas Kazimi.

tende ad uniformare la velocità nel continuo, analogamente a come la diffusione termica tende ad uniformare la temperatura.

Il contributo della pressione idrostatica nelle equazioni di NS.
Consideriamo l'equazione di bilancio della q.d.m per un fluido soggetto alla forza peso, con l'asse z diretto verso l'alto, ovvero $\underline{f}' = -g\,\underline{k}$

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho\, \underline{v} \cdot \mathrm{grad}\, \underline{v} = -\mathrm{grad}\, p + \mathrm{div}\, \underline{\underline{T}} - \rho\, g\, \underline{k} \tag{3.54}$$

Essendo la forza peso conservativa possiamo scrivere

$$\underline{f}' = -\mathrm{grad}\,(g\, z) \tag{3.55}$$

dove $\varphi = gz$ rappresenta l'energia potenziale; sostituendo nella (3.54)

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho\, \underline{v} \cdot \mathrm{grad}\, \underline{v} &= -\mathrm{grad}\, p + \mathrm{div}\, \underline{\underline{T}} - \rho\, \mathrm{grad}(g\, z) = \\ &= -\mathrm{grad}\, p + \mathrm{div}\, \underline{\underline{T}} - \mathrm{grad}(\rho\, g\, z) + g\, z\ \mathrm{grad}\, \rho \end{aligned} \tag{3.56}$$

Se la densità del fluido è uniforme, l'ultimo termine è nullo e il termine della forza di massa può essere conglobato col gradiente di pressione per avere

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho\, \underline{v} \cdot \mathrm{grad}\, \underline{v} = -\mathrm{grad}\, p' + \mathrm{div}\, \underline{\underline{T}} \quad , \quad p' = p + \rho\, g\, z = p + \rho\, \varphi \tag{3.57}$$

Si vede che la suddetta equazione ammette una soluzione banale per $\underline{v} = 0$, ovvero

$$\mathrm{grad}\, p' = 0 \qquad \rightarrow \qquad p = p_0 - \rho\, g\, z \tag{3.58}$$

che è la ben nota espressione della legge di Stevin. Da questo si evince che (in caso di densità costante) la forza peso è in grado di produrre solo una distribuzione idrostatica di pressione e che il moto del fluido, come mostrato dalla (3.57), è governato solo dall'eccesso di pressione (o meglio, del suo gradiente) rispetto al valore idrostatico, come se la forza peso non esistesse. Più precisamente, questa conclusione è valida solo quando le condizioni al contorno del sistema non specificano la pressione.
Si può anche capire che la stessa conclusione vale per qualunque forza conservativa, ovvero esprimibile tramite un gradiente, incluse quelle centrifughe ed elettrostatiche, purchè le proprietà del fluido siano uniformi. Nel caso invece di proprietà non uniformi rimane nella equazione anche l'ultimo termine della (3.56) che contiene il gradiente della densità ed è responsabile, ad esempio, dei moti di convezione naturale[12].

I moti geostrofici.
Da un esame delle (3.52), si vede come nei moti dominati dalle differenze di pressione, il fluido tenda a muoversi in direzione dei gradienti di pressione. Una importante eccezione è costituita dalla circolazione atmosferica *su larga scala*: basta infatti osservare in televisione un bollettino meteorologico per constatare che in tal caso i venti si orientano nella direzione

---

[12] Si ricorda che il fluido subisce moti di convezione naturale quando la sua densità varia con la temperatura, il che provoca lo spostamento verso l'alto delle parti di fluido meno dense.

delle isobare, e non perpendicolarmente ad esse.
La ragione di questo comportamento, a prima vista inspiegabile, va ricercata nella non inerzialità del sistema di riferimento della terra, dovuta alla sua rotazione. In tale sistema di riferimento, ruotante con velocita angolare **$\underline{\Omega}$**, si può scrivere, in termini di velocità relative *w*

$$\rho\left[\frac{D\,w}{D\,t}+\underline{\Omega}\times(\underline{\Omega}\times\underline{r})+2\,\underline{\Omega}\times\underline{w}\right]=\mu\,\nabla^2\underline{w}-\mathrm{grad}\,p+\rho\,\underline{f}\,' \qquad (3.59)$$

dove a primo membro compaiono nell'ordine l'accelerazione centrifuga e l'accelerazione di Coriolis[13].
In caso stazionario si ha quindi, dividendo per ρ

$$\underline{w}\cdot\mathrm{grad}\,\underline{w}=-\underline{\Omega}\times(\underline{\Omega}\times\underline{r})-2\,\underline{\Omega}\times\underline{w}+\nu\,\nabla^2\underline{w}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p+\rho\,\underline{f}\,' \qquad (3.60)$$

Come è noto, la forza centrifuga è conservativa e l'energia potenziale è data da

$$\underline{\Omega}\times(\underline{\Omega}\times\underline{r})=-\,\mathrm{grad}\left(-\,\frac{1}{2}\Omega^2 r'^2\right) \qquad (3.61)$$

dove *r'* è la distanza dall'asse di rotazione, quindi, come fatto in precedenza per la pressione idrostatica, la possiamo conglobare insieme alla forza peso nel termine di pressione considerando una pressione modificata[14]

$$p'=p-\frac{1}{2}\rho\,\Omega^2\,r'^2+\rho\,g\,z \qquad (3.62)$$

Quindi anche il termine centrifugo, analogamente a quanto già visto nel paragrafo precedente per la forza peso, non dà contributo al moto, ma crea unicamente una distribuzione statica di pressione. Sempre nel caso della rotazione terrestre e della circolazione atmosferica, si potrebbe mostrare[15] che il contributo del termine inerziale e di quello viscoso è piccolo (almeno non troppo vicino al suolo, per quanto riguarda quest'ultimo), per cui si ha alla fine

$$2\,\underline{\Omega}\times\underline{w}=-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p' \qquad (3.63)$$

Essendo la forza di Coriolis perpendicolare a $\underline{w}$, si deduce che anche grad *p'* è perpendicolare a $\underline{w}$; per cui $\underline{w}$ è parallelo alle linee isobare (per definizione perpendicolari a grad *p'*) e quindi, in definitiva, su larga scala il vento si muove in direzione parallela alle isobare, come mostrato nei bollettini meteorologici. Questo tipo di moto, dominato dalla forza di Coriolis, prende il nome di *moto geostrofico* e ha luogo ad un'altezza sufficiente dal terreno, ovvero al di fuori

[13] Gaspard Gustave de Coriolis, 1792 – 1843, è ricordato soprattutto per la forza che prende il suo nome, apparsa nell'articolo del 1835 "*Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*". Insegnò meccanica nelle maggiori *ecoles* francesi, collaborando con Navier, Poncelet e Cauchy. Si occupò di meccanica e matematica applicata, ed a lui si deve anche l'introduzione dei termini "lavoro" ed "energia cinetica" nella loro accezione attuale. Il suo nome è tra quelli incisi sulla torre Eiffel.
[14] Si potrebbe anche verificare che l'accelerazione centrifuga, all'equatore, vale al massimo lo 0.3% dell'accelerazione di gravità.
[15] Si veda il testo di Tritton, cap.16.

del cosiddetto *planetary boundary layer* (p.b.l) che si estende in media fino a 600 m dal suolo (questo valore dipende anche dalle condizioni meteo).

Dalla (3.63) si può anche verificare, con un po' di esercizio sui prodotti vettoriali, che nell'emisfero boreale la circolazione attorno ad un'area di alta pressione deve essere oraria (anticiclonica, secondo la terminologia meteo) e quella attorno ad un'area di bassa pressione, invece, antioraria (ciclonica). L'opposto accade nell'emisfero australe: dove si dice che anche l'acqua nei vortici dei lavandini ruoti in direzione opposta!

ESEMPIO 3.4 – Circolazione atmosferica.

Stimare il valore della velocità del vento indotta da un vortice ciclonico con gradiente medio di 20 mbar su 1000 km, alla latitudine di $\Theta = 45°$.

Dalla Eq.(3.63), si ottiene, passando ai moduli

$$w = \frac{\mathrm{grad}\, p}{2\rho\Omega\ \sin\Theta}$$

La velocità di rotazione terrestre vale $\Omega = 2\pi/86400 = 7.27 \times 10^{-5}$ rad/s, il gradiente di pressione in unità SI è pari a 2×10^{-3} Pa/m, per cui, assumendo $\rho = 1.22$ kg/m^3, si ha $w \cong 16$ m/s.
Tale velocità (corrispondente a circa 50 km/h) si verifica approssimativamente in quota e non a livello suolo, dove il moto del vento è rallentato dagli effetti viscosi. A rigore, questo richiederebbe anche una piccola correzione del valore di densità, inopportuna per una stima così grossolana.

❑

Bilanci locali di energia

In accordo con la tabella 2, il bilancio locale di energia totale può essere scritto, in forma euleriana, come

$$\rho\frac{\partial u_0}{\partial t} + \rho\, \underline{v} \cdot \mathrm{grad}\, u_0 = \mathrm{div}\left[\left(\underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}}\right) \cdot \underline{v} - \underline{q}''\right] + \left[q''' + \rho\, \underline{v} \cdot \underline{f}'\right] \tag{3.64}$$

ovvero nella corrispondente forma lagrangiana

$$\rho\frac{D u_0}{D t} = \mathrm{div}\left[\left(\underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}}\right) \cdot \underline{v} - \underline{q}''\right] + \left[q''' + \rho\, \underline{v} \cdot \underline{f}'\right] \tag{3.65}$$

E' opportuno ricordare che il termine di flusso termico $\underline{q}$" vi appare con segno negativo in quanto il suo contributo aumenta l'energia quando esso è entrante, ovvero diretto in senso contrario a $\underline{n}$. Il secondo membro può essere facilmente riarrangiato nella forma

$$\boxed{\rho\frac{D u_0}{D t} = -\mathrm{div}\, \underline{q}'' + q''' + \mathrm{div}\left[\left(\underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}}\right) \cdot \underline{v}\right] + \underline{v} \cdot \rho\, \underline{f}'} \tag{3.66}$$

dove appare più chiarmente la distinzione tra i termini "termici" (i primi due) e quelli "meccanici" (i rimanenti). Le unità sono W/m^3. Nel seguito verranno ricavate alcune forme di bilanci parziali di energia, limitandosi alla forma locale per non appesantire troppo la trattazione simbolica. Naturalmente è possibile scrivere i bilanci suddetti anche in forma integrale, sostituendo gli appropriati valori di c, $\underline{J}$ e Φ (v. tab.2) nelle (3.1), (3.2) e (3.3).

Equazione dell'energia cinetica (o energia meccanica)

Moltiplicando scalarmente per $\underline{v}$ l'equazione di bilancio locale della quantità di moto, (3.42), si ottiene

$$\begin{aligned} &\rho\, \underline{v} \cdot \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{v} \cdot \operatorname{grad} p + \underline{v} \cdot \operatorname{div} \underline{\underline{T}} + \underline{v} \cdot \rho\, \underline{f}\,' \\ &\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\underline{v} \cdot \operatorname{grad} p + \underline{v} \cdot \operatorname{div} \underline{\underline{T}} + \underline{v} \cdot \rho\, \underline{f}\,' \end{aligned} \tag{3.67}$$

si ha che

$$-\underline{v} \cdot \operatorname{grad} p = -\operatorname{div}\left(p\, \underline{v}\right) + p \operatorname{div} \underline{v} \tag{3.68}$$

ed inoltre si può dimostrare che[16]

$$\underline{v} \cdot \operatorname{div} \underline{\underline{T}} = \operatorname{div}\left(\underline{v} \cdot \underline{\underline{T}}\right) - \underline{\underline{\dot{D}}} : \underline{\underline{T}} = \operatorname{div}\left(\underline{v} \cdot \underline{\underline{T}}\right) - \varphi \tag{3.69}$$

dove il termine $\varphi = \underline{\underline{\dot{D}}} : \underline{\underline{T}}$ che rappresenta la potenza delle forze dissipative, è detto anche *potenza dello stress*. Sostituendo le (3.68) e (3.69) nella (3.67) si ottiene

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\operatorname{div}\left(p\, \underline{v}\right) + p \operatorname{div} \underline{v} + \operatorname{div}\left(\underline{v} \cdot \underline{\underline{T}}\right) - \varphi + \underline{v} \cdot \rho\, \underline{f}\,' \tag{3.70}$$

oppure, raccogliendo i termini, in forma più canonica

$$\boxed{\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \operatorname{div}\left[\left(\underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}}\right) \cdot \underline{v}\right] + p \operatorname{div} \underline{v} - \varphi + \underline{v} \cdot \rho\, \underline{f}\,'} \tag{3.71}$$

Equazione dell'energia termica

Sottraendo la (3.70) dalla (3.66) si ottiene il bilancio di energia termica

$$\boxed{\rho \frac{Du}{Dt} = -\operatorname{div} \underline{q}\,'' + q''' - p \operatorname{div} \underline{v} + \varphi} \tag{3.72}$$

E' opportuno notare che il termine di dissipazione φ, che non compare nel bilancio di energia totale(3.66), compare invece a sottrarre nel bilancio di energia meccanica (3.70) ed a sommare in quello di energia termica (3.72). Si può verificare, con un po' di pazienza, che φ è positivo per un fluido newtoniano; più in generale, considerazioni legate al secondo principio della termodinamica portano a concludere che tale termine deve sempre essere positivo (o al limite nullo) qualunque sia il modello costituitivo adottato, in quanto le forze dissipative non possono che portare alla distruzione di energia meccanica ed incremento di quella termica.

Il termine p div $\underline{v}$, (che non è altro che il lavoro reversibile di dilatazione per unità di tempo!) rappresenta invece la conversione reversibile di energia termica in energia meccanica e viceversa.

[16] V. ad esempioWhitaker, p.233.

Equazione di bilancio dell'entalpia

Eliminiamo il termine p div $\underline{v}$ dalla (3.72) sfruttando il bilancio di massa (3.38) moltiplicato per p/ρ

$$\frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + p \operatorname{div} \underline{v} = 0 \tag{3.73}$$

ottenendo

$$\rho\frac{Du}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\operatorname{div} \underline{q}'' + q''' + \varphi \tag{3.74}$$

tenendo conto che

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) = -\frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} \tag{3.75}$$

e sostituendo nella (3.74) la precedente e l'entalpia, definita come è noto da

$$h = u + \frac{p}{\rho} \tag{3.76}$$

con alcuni facili passaggi si ottiene infine

$$\begin{gathered} \rho\frac{Dh}{Dt} + \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \frac{Dp}{Dt} = -\operatorname{div} \underline{q}'' + q''' + \varphi \\ \boxed{\rho\frac{Dh}{Dt} = -\operatorname{div} \underline{q}'' + q''' + \varphi + \frac{Dp}{Dt}} \end{gathered} \tag{3.77}$$

che risulta particolarmente utile in caso di sistemi isobari.
In particolare, da essa si nota[17] che in un sistema isobaro, reversibile e con generazione interna nulla (ovvero Dp/Dt = φ = q''' = 0) il calore scambiato è pari alla variazione di entalpia del sistema, risultato noto dalla Fisica Tecnica.

Riassumendo, le (3.66), (3.71), (3.72), (3.77) costituiscono le quattro forme di bilancio energetico che ci serviranno nelle applicazioni. Esse possono essere derivate dalla forma generale (3.34) o (3.35) sostituendovi le quantità c, $\underline{J}$ e Φ riportate in Tab.2.

Generalizzazione dell'equazione di Fourier

Sostituendo nella (3.77) l'espressione dell'entalpia per sostanze monofase bivarianti, riportata nel Cap 2, $\mathrm{d}h = c_p\, \mathrm{d}T + [(1-\beta T)/\rho]\, \mathrm{d}p$, è possibile far comparire direttamente la temperatura

$$\rho\left[c_p\frac{DT}{Dt} + \frac{1-\beta T}{\rho}\frac{Dp}{Dt}\right] = -\operatorname{div} \underline{q}'' + q''' + \varphi + \frac{Dp}{Dt} \tag{3.78}$$

Considerando inoltre il flusso termico come unicamente conduttivo e dato dal postulato di

[17] Il risultato è ancora più evidente utilizzando la formulazione integrale.

Fourier per materiali omogenei ed isotropi, ($\underline{q}$" = -λ grad T) si ottiene

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q''' + \varphi + \beta T \frac{\partial p}{\partial t} \tag{3.79}$$

Infine per un fluido stagnante ($\underline{v}$ = 0, φ = 0) si ottiene

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q''' + \beta T \frac{\partial p}{\partial t} \tag{3.80}$$

che generalizza l'equazione di Fourier. In particolare, la forma ricavata nel cap.2 non è valida solo per sistemi incomprimibili (β=0), ma anche per sistemi comprimibili *isobari*. In questo caso il valore corretto del calore specifico da introdurre è c_p. E' appena il caso di ricordare che, se λ è indipendente dalla temperatura, $\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \lambda \nabla^2 T$.

Applicazione: bilancio locale ed integrale di energia termica in un condotto cilindrico a regime

Si consideri un condotto cilindrico a pareti fisse (non necessariamente circolare) in cui scorre un fluido incomprimibile con portata $\dot{m}$, in condizioni di regime; siano A_1 e A_2 le sezioni di ingresso e di uscita (ovviamente $A_1 = A_2$).

Scriviamo il bilancio di entalpia nel caso stazionario in forma integrale, a partire dalla (3.2) con i dati di Tab.2

$$\oiint_S \rho h \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS = \oiint_S -\underline{q}'' \cdot \underline{n} \, dS + \iiint_V \left(q''' + \varphi + v \cdot \operatorname{grad} p \right) dV \tag{3.81}$$

Supponiamo inoltre, per semplicità, nulle o trascurabili la generazione termica volumetrica, q''', la dissipazione viscosa φ e la caduta di pressione grad p (considerando quindi un deflusso *isobaro*) ottenendo

$$\oiint_S \rho h \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS = \oiint_S -\underline{q}'' \cdot \underline{n} \, dS \tag{3.82}$$

Trascuriamo adesso il contributo del flusso termico attraverso le aperture di ingresso e di uscita; questa ipotesi è perfettamente lecita tranne nel caso che il fluido sia un buon conduttore termico (es. un metallo liquido). Si ha quindi, detta A_L la superficie laterale del condotto,

$$\iint_{A_2} \rho h v \, dA - \iint_{A_1} \rho h v \, dA = -\iint_{A_L} q'' \, dA \tag{3.83}$$

e sostituendo anche all'entalpia il suo valore medio, detto *entalpia di miscela*[18]

$$h_m = \frac{\iint_A \rho h v \, dA}{\iint_A \rho v \, dA} = \frac{\iint_A \rho h v \, dA}{\dot{m}} \tag{3.84}$$

si può ottenere

[18] Il termine deriva dal fatto che questa sarebbe l'entalpia posseduta dal fluido se lo si versasse dal condotto in un contenitore e lo si mescolasse fino a fargli assumere proprietà uniformi.

$$\dot{m}\left(h_{m,2}-h_{m,1}\right)=-\iint_{A_L} q''\,\mathrm{d}A=W_T \tag{3.85}$$

E’ da notare esplicitamente che i valori medi adottati per *h* e *v conservano* il flusso di entalpia attraverso gli ingressi e le uscite. La (3.85) conserva la sua validità anche nel caso di un condotto a sezione variabile.

Se consideriamo uno spezzone infinitesimo di condotto, di lunghezza dz, il cui perimetro riscaldato è p_h, la (3.85) si riduce a

$$\begin{gathered}\dot{m}\,\mathrm{d}h_m=-q''\,\mathrm{d}A_L=-q''\,p_h\,\mathrm{d}z\\ \dot{m}\,\frac{\mathrm{d}h_m}{\mathrm{d}z}=-q''\,p_h\end{gathered} \tag{3.86}$$

Infine, per un fluido *monofase*, si può sfruttare la relazione $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T + (1-\beta T)/\rho\,\mathrm{d}p$ per trasformare la precedente in

$$\dot{m}\left(c_p\,\frac{\mathrm{d}T_m}{\mathrm{d}z}+\xcancel{\frac{1-\beta T}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}}\right)=-q''\,p_h \tag{3.87}$$

dove si è tenuto conto che il sistema è isobaro ($\mathrm{d}p=0$) e la T_m, detta *temperatura di miscela*, corrisponde all’entalpia di miscela h_m data nella (3.84), oppure è definita da

$$T_m=\frac{\iint_A \rho\,c_p\,T\,v\,\mathrm{d}A}{\iint_A \rho\,c_p\,v\,\mathrm{d}A}=\frac{\iint_A \rho\,c_p\,T\,v\,\mathrm{d}A}{\dot{m}\,c_p} \tag{3.88}$$

Assegnato un opportuno valore della temperatura di ingresso, la (3.87) permette di determinare l’andamento della temperatura media di miscela lungo l’asse un condotto, noto quello del flusso termico. La (3.86) e la sua forma integrale, (3.85), costituiscono le due equazioni maggiormente usate per lo studio dello scambio termico nei condotti.
Nel caso invece si abbia a che fare con un fluido *bifase*, si ha

$$h=h_f+x\,(h_g-h_f)=h_f+x\,h_{fg} \tag{3.89}$$

e dato che in condizioni isobare le entalpie del liquido e del vapore saturo si mantengono costanti

$$\mathrm{d}h_m=h_{fg}\,\mathrm{d}x \tag{3.90}$$

per cui la (3.86) diviene:

$$\dot{m}\,h_{fg}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-q''\,p_h \tag{3.91}$$

Nel caso che il condotto sia costituito da una prima sezione monofase seguita da una in saturazione (come accade nei generatori di vapore, dove il liquido viene prima riscaldato fino alla temperatura di saturazione e quindi evapora) occorre studiare il condotto in due sezioni distinte, separate alla quota (*altezza bollente*) in cui il liquido diviene saturo.

L'EQUAZIONE DI BERNOULLI

In questo paragrafo cercheremo di dare una visione panoramica sul problema della ricerca di un invariante (ovvero, di una quantità che si mantiene costante) del moto *stazionario*[19] di un fluido, cercando di limitare al minimo le ipotesi necessarie, e analizzeremo alcuni casi particolari.
Tale invariante comparve per la prima volta in un trattato, *Hydrodynamica*, pubblicato da Daniel Bernoulli (1700-1782) nel 1738, e origina da lui il suo nome; probabilmente però poche equazioni della fluidodinamica sono state riportate nei testi successivi in maniera altrettanto multiforme dell'equazione di Bernoulli.

Daniel Bernoulli era solo uno degli esponenti di una famiglia di matematici di origine belga trasferiti in Svizzera, che annovera tra i più illustri anche suo zio Jacob (1654-1705) e suo padre Johann (1667-1748). I tre dettero contributi fondamentali sia in matematica che in fisica. Si trattava certamente di una famiglia geniale, ma non molto unita: Jacob e Johann furono sempre in cattivi rapporti ed invidiosi l'uno dell'altro; Johann fu sempre geloso dei successi del figlio, e nel 1739 pubblicò anche lui un trattato di fluidodinamica, *Hydraulica*, predatandolo falsamente al 1732 in modo da attribuirsene l'originalità. Le indagini storiche hanno restituito i meriti a Daniel: non è esclusa comunque una sua cooperazione con il padre nei tempi in cui erano ancora in buoni rapporti.

Dal bilancio locale di quantità moto *in caso stazionario, per fluido non viscoso e forze di massa conservative* si ha

$$\rho\left(\underline{v}\cdot\mathrm{grad}\,\underline{v}\right)=-\,\mathrm{grad}\,p-\rho\,\mathrm{grad}\,\psi \qquad (3.92)$$

Sfruttando la identità vettoriale

$$\underline{v}\cdot\mathrm{grad}\,\underline{v}=\frac{1}{2}\mathrm{grad}\,v^2-\underline{v}\times\mathrm{rot}\,\underline{v} \qquad (3.93)$$

e sostituendo nella (3.92) introducendo la vorticità, $\underline{\zeta}=\mathrm{rot}\,\underline{v}$, si ha

$$\mathrm{grad}\,p+\rho\,\mathrm{grad}\,\psi+\rho\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right)=\rho\,\underline{v}\times\underline{\zeta} \qquad (3.94)$$

ovvero

$$\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p+\ \mathrm{grad}\left(\psi+\frac{1}{2}v^2\right)=\underline{v}\times\underline{\zeta} \qquad (3.95)$$

Sono a questo punto necessarie alcune considerazioni sull'entropia, che può essere espressa tramite la relazione di Gibbs

$$T\mathrm{d}s=\mathrm{d}h-\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p \qquad (3.96)$$

Quindi per un fluido di composizione omogenea si può anche affermare che

[19] Esistono infatti anche formulazioni dell'equazione di Bernoulli per moti non stazionari.

$$T \operatorname{grad} s = \operatorname{grad} h - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \tag{3.97}$$

ed eliminando il termine 1/ρ grad *p* tra la (3.95) e la (3.97)

$$\operatorname{grad}\left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \psi\right) = \operatorname{grad} H = T \operatorname{grad} s + \underline{v} \times \underline{\zeta} \tag{3.98}$$

che fu ottenuta da Crocco[20] nel 1937. Quindi nelle ipotesi seguenti

- moto è isoentropico, o più propriamente *omoentropico*, grad *s* = 0;
- il moto è stazionario;

si può concludere che

$$\operatorname{grad} H = \underline{v} \times \underline{\zeta} \tag{3.99}$$

ovvero la quantità *H* è un *invariante del moto* e si mantiene costante sulle linee di flusso o sulle linee di vorticità. Infatti, detto $\underline{a}$ un generico versore parallelo a $\underline{v}$ o $\underline{\zeta}$, e ricordando che il prodotto triplo è nullo quando due vettori sono paralleli, si ha

$$\frac{\partial H}{\partial a} = \operatorname{grad} H \cdot \underline{a} = \underline{v} \times \underline{\zeta} \cdot \underline{a} = 0 \tag{3.100}$$

Si può dimostrare che l'insieme combinato di linee di flusso e di vorticità costituisce una superficie, detta *superficie di Lamb*, sulla quale la quantità *H* è costante.
Inoltre, nel caso (non infrequente) che il moto sia irrotazionale, ovvero $\underline{\zeta}=0$,

$$\operatorname{grad} H = \operatorname{grad}\left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \psi\right) = 0 \tag{3.101}$$

si ha che *H è uniforme in tutto il fluido*.

Generalizzazione al moto instazionario

In un caso più generale (v. App.3.1) si può dimostrare che, anche nel caso di moto non stazionario, se

- il fluido è inviscido e non conduttore, (3.132), (ovvero il moto è omoentropico);
- le forze di massa ammettono un potenziale indipendente dal tempo ($\partial\psi/\partial t = 0$);
- il campo di pressione è stazionario ($\partial p/\partial t = 0$);

allora si ha

$$\frac{D}{Dt}\left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \psi\right) = \frac{DH}{Dt} = 0 \tag{3.102}$$

La suddetta equazione affronta il problema dal punto di vista lagrangiano e ci dice che, nelle ipotesi fatte, la quantità *H* si mantiene costante lungo un cammino materiale.
In pratica, quando *H* è costante la somma dell'energia interna, cinetica, potenziale e di

[20] Gaetano Arturo Crocco (1877 – 1968), docente e scienziato, pioniere italiano dell'aviazione e della propulsione a razzo, fondatore nel 1926 della Scuola di Ingegneria Aeronautica presso l'Università di Roma.

pressione si mantiene costante, e l'energia totale posseduta dal fluido si "trasferisce" semplicemente da una forma all'altra, ad esempio incrementando la velocità a spese della pressione (oppure dell'energia interna, e quindi della temperatura).
Le espressioni sopra ottenute *sono indipendenti dalla natura del fluido*. Vediamo nel seguito alcuni casi particolari della (3.99).

Moto stazionario di un fluido incomprimibile

In questo caso si ha grad u = 0, come si evince dall'equazione di bilancio dell'energia termica scritta nelle ipotesi sin qui adottate, e in particolare per moto stazionario $\partial u / \partial t = 0$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \left(\underline{v} \cdot \operatorname{grad} u \right) = -\operatorname{div} q'' + q''' - p \operatorname{div} \underline{v} + \varphi = 0 \qquad (3.103)$$

per cui la (3.99) si riconduce alla forma

$$\operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2} + \psi + \frac{p}{\rho} \right) = \underline{v} \times \underline{\zeta} \qquad (3.104)$$

che del resto è ottenibile anche direttamente dalla (3.95) con ρ = cost.

Come mostrato nel successivo paragrafo sull'equazione di vorticità, la (3.104) è anche ottenibile direttamente dall'equazione di quantità di moto (3.44) supponendo il fuido ideale e ρ = cost. Questa è la forma più vicina alla derivazione originale di Bernoulli ed è anche quella che useremo più di frequente nel seguito.

Come visione alternativa, la (3.44) mostra che p/ρ può essere considerato l'energia potenziale di una forza conservativa, la *forza di pressione*: la (3.104) stabilisce che (nelle ipotesi assunte) sulle superfici di Lamb l'energia cinetica, l'energia della forza di pressione e quella delle forze di massa hanno somma costante.

Moto stazionario di un gas ideale con c_p = cost

In questo caso valgono le note relazioni per il gas ideale

$$c_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \quad , \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad , \quad \frac{p}{\rho} = RT \qquad (3.105)$$

e inoltre si può scrivere

$$\mathrm{d}h = c_p \,\mathrm{d}T = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \mathrm{d}T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \mathrm{d}\frac{p}{\rho} \qquad (3.106)$$

Sostituendo nella (3.99) si ha

$$\operatorname{grad} H = \operatorname{grad}\left(\frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \psi \right) = \underline{v} \times \underline{\zeta} \qquad (3.107)$$

Si può inoltre notare che per il gas ideale la velocità del suono è data da $c^2 = \gamma R T = \gamma \frac{p}{\rho}$, per cui la precedente talvolta si trova riformulata in termini di velocità del suono

$$\operatorname{grad} H = \operatorname{grad}\left(\frac{c^2}{(\gamma-1)} + \frac{v^2}{2} + \psi \right) = \underline{v} \times \underline{\zeta} \qquad (3.108)$$

L'equazione di Bernoulli generalizzata

L'equazione di Bernoulli generalizzata è stata introdotta in Fisica Tecnica per studiare il moto nei condotti, ed in particolare determinare la caduta di pressione ai capi di una tubazione o la prevalenza della pompa necessaria in un circuito. Dette 1 e 2 le sezioni di estremità del circuito, essa si scrive tradizionalmente nella forma

$$\alpha' \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} = h' - h_a \qquad [\mathrm{m}] \qquad (3.109)$$

Dove z è la quota della sezione sul piano di riferimento, *h'* rappresenta la *prevalenza della pompa* e h_a le *perdite di carico*. Sul termine α' torneremo nel seguito del paragrafo. Pur avendo a comune con l'equazione di Bernoulli prima introdotta la forma del primo termine (anche se in questo caso si considera solo il potenziale della forza di gravità), si può vedere che essa è ricavata sotto ipotesi diverse (in particolare in questo caso il moto non è necessariamente reversibile) e discende direttamente dal bilancio integrale di energia cinetica di un fluido incomprimibile. Infatti dal bilancio integrale di energia cinetica[21], in caso di moto stazionario e fluido incomprimibile, avendo considerato solo la forza di massa dovuta alla gravità e avendola sostituita con la sua energia potenziale, *-gz*, si ha

$$\oiint_s \rho \left(\frac{v^2}{2} + gz \right) (\underline{v} \cdot \underline{n}) \, \mathrm{d}S = \oiint_s \left(\underline{\underline{T}} - p\underline{\underline{I}} \right) \cdot \underline{v} \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}S - \iiint_v \varphi \, \mathrm{d}V \qquad (3.110)$$

Si porta a primo membro la pressione, si suppone di poter sostituire la velocità con il suo valore medio di portata e si nota che gli integrali di superficie sono non nulli solo sulle aperture di ingresso e di uscita o sulle pareti mobili (S_m); trascurando il contributo delle tensioni deviatoriche sulle aperture[22] si ha quindi

$$\begin{aligned} \iint_{A_1} \rho \left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) (\underline{v} \cdot \underline{n}) \, \mathrm{d}A + \iint_{A_2} \rho \left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) (\underline{v} \cdot \underline{n}) \, \mathrm{d}A = \\ = \iint_{S_m} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}S - \dot{E}_{diss} \end{aligned} \qquad (3.111)$$

dove con $\dot{E}_{diss}$ si è indicata la dissipazione viscosa volumetrica. Il primo termine a secondo membro rappresenta la potenza erogata (o assorbita) dalle superfici mobili di eventuali organi promotori del moto (pompe o turbine) e si indica con W_{shear}. In conclusione si può affermare

$$\dot{m}_2 \left(\frac{\alpha' v_2^2}{2} + g\, z_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) - \dot{m}_1 \left(\frac{\alpha' v_1^2}{2} + g\, z_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) = W_{shear} - \dot{E}_{diss} \qquad (3.112)$$

---

[21] Eq.(3.2) con le grandezze specificate in Tab.2.

[22] tale contributo sarebbe al più quello dovuto alla componente deviatorica della pressione, che si manifesta solo in caso di significativi gradienti di velocità lungo l'asse del condotto.

Dove il termine α’ è il fattore correttivo che tiene conto della differenza tra la il cubo della velocità media di portata e la velocità cubica media, trattato nel par.(***ancora da scrivere*).

$$\alpha' = \frac{\iint_{A_1} \rho \frac{v^3}{2} \, \mathrm{d}A}{\rho \frac{\overline{v}^3}{2} A_1} \qquad , \qquad \overline{v} = \frac{\iint_{A_1} \rho v \, \mathrm{d}A}{\rho \, A_1} \tag{3.113}$$

Tale fattore correttivo è molto prossimo ad 1 nel caso di moto turbolento, e vale invece 2 nel caso di moto laminare in condotti circolari. Notando che a regime la portata in ingresso è uguale a quella di uscita, si può raccogliere la portata e dividere per la portata in peso, $\dot{m} g$, (riportando così il bilancio a energia per unità di peso, ovvero metri) ottenendo

$$\left(\frac{\alpha' v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) - \left(\frac{\alpha' v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) = \frac{W_{shear}}{\dot{m} g} - \frac{\dot{E}_{diss}}{\dot{m} g} = h' + h_a \qquad \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{N/s}} = \mathrm{m} \right] \tag{3.114}$$

che coincide appunto con la (3.109).

L’equazione generalizzata di Bernoulli non è quindi altro che un bilancio di energia meccanica per unità di peso per il moto stazionario di un fluido incomprimibile.

In un certo senso, la (3.114) può essere considerata il complemento del bilancio di energia termica nel condotto, Eq.(3.85), anche se sotto ipotesi lievemente diverse. In particolare, la dissipazione viscosa viene trascurata nella (3.85) ma non nella (3.114): non è detto che questo porti automaticamente a gravi errori, in quanto ciò che non è trascurabile in una equazione può tranquillamente esserlo nell’altra. Le due equazioni vengono spesso usate in contemporanea per calcolare la caduta di pressione e la variazione di entalpia in un condotto, nell’ipotesi che quest’ultima non sia influenzata dalla dissipazione viscosa.

Se la dissipazione viscosa non fosse trascurabile ai fini termici, non è difficile aggiungere il suo contributo nella (3.85). Questo è il caso dei condotti adiabatici, in cui il fluido circolante si riscalda per effetto della dissipazione viscosa: ad esempio, i reattori nucleari vengono portati dalla condizione di arresto freddo a quella di arresto caldo semplicemente facendo circolare il fluido nei condotti tramite l’azionamento delle pompe (ma in questo caso il sistema non è - e non può essere - in condizioni stazionarie). La dissipazione viscosa può giocare un ruolo non trascurabile anche nel flusso in microcanali.

L'EQUAZIONE DI VORTICITÀ

E' necessario dare un breve cenno anche sull'equazione di vorticità, largamente utilizzata in aerodinamica. Si parte in questo caso dalle equazioni di Navier-Stokes (assumendo così implicitamente che il fluido sia incomprimibile e newtoniano) in cui si suppongono le f*orze di massa conservative* (e quindi, irrotazionali)

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\mathrm{grad}\,\underline{v}\right) = -\mathrm{grad}\,p + \mu\nabla^2\underline{v} - \rho\,\mathrm{grad}\,\psi \qquad (3.115)$$

e si sfrutta nuovamente l'identità (3.93) per sostituire $\underline{v}\cdot\mathrm{grad}\,\underline{v}$ e ottenere

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} - \underline{v}\times\underline{\zeta} = -\mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \psi + \frac{v^2}{2}\right) + \upsilon\nabla^2\underline{v} \qquad (3.116)$$

dove $\upsilon = \mu/\rho$ è la viscosità cinematica.

Per un moto stazionario e non viscoso, la (3.116) restituisce l'equazione di Bernoulli, (3.104).

Si fa a questo punto il rotore di entrambi i membri, ricordando che il moto è incomprimibile (div $\underline{v}$ = 0), il rotore di un gradiente è identicamente nullo (rot grad *c* = 0) e la divergenza del rotore è identicamente nulla (div $\underline{\zeta}$ = 0), per ottenere con alcuni passaggi la nuova equazione *vettoriale*

$$\frac{D\underline{\zeta}}{Dt} = \underline{\zeta}\cdot\mathrm{grad}\,\underline{v} + \upsilon\nabla^2\underline{\zeta} \qquad (3.117)$$

da cui si vede che in un sistema lagrangiano, solidale quindi con la particella, la variazione di vorticità è dovuta a due cause: la diffusione di vorticità dovuta alla viscosità ($\upsilon\nabla^2\underline{\zeta}$) e riaggiustamento di vorticità dovuto al cambio di forma ($\underline{\zeta}\cdot\mathrm{grad}\,\underline{v}$).

Il cambio di forma è associato cosiddetti ai fenomeni di *vortex twisting* e *vortex stretching* (vedi il testo di Tritton, sez.6.6): in estrema sintesi, quando un volume di fluido in rotazione si allunga (stretching), riducendo il suo momento di inerzia, la conservazione del momento della quantità di moto richiede che la velocità di rotazione aumenti (è il fenomeno per cui una pattinatrice fa le piroette dandosi lo slancio e raccogliendo le braccia). Analoghe variazioni di vorticità sono indotte dal "ripiegamento" del volume (twisting).

Il termine $\underline{\zeta}\cdot\mathrm{grad}\,\underline{v}$ è sicuramente nullo nel caso di moto piano o assialsimmetrico: infatti, in questo caso, la vorticità è perpendicolare al piano mentre il gradiente della velocità giace su di esso. Una implicazione notevole della (3.117) è che, in tali moti, nel caso di *assenza di forze viscose e forze rotazionali* la vorticità *si conserva*.
Dalla (3.117) si può anche intuire, sebbene non rigorosamente, che *un moto inizialmente irrotazionale rimane tale in assenza di forze viscose e rotazionali*: una prova più rigorosa si può ottenere dal teorema di Kelvin, v. Tritton cap.10.
Bisogna infine aggiungere che, in talune condizioni, anche i gradienti di temperatura possono creare vorticità, come accade nel caso della convezione naturale (v. Tritton, cap.14).

IL MOTO TURBOLENTO

Fenomenologia del moto turbolento

Metodi di approccio alla turbolenza

LA FUNZIONE DI CORRENTE

Consideriamo l'equazione di continuità per il moto piano (v_z=0) di un fluido incomprimibile

$$\mathrm{div}\,\underline{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{3.118}$$

Consideriamo ora una funzione, detta *funzione di corrente* Ψ [m²/s], tale che

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v_y = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \tag{3.119}$$

Si può verificare che se $\underline{v}$ rispetta le (3.119), l'equazione di continuità è automaticamente verificata; infatti

$$\mathrm{div}\,\underline{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0 \tag{3.120}$$

Proprietà della funzione di corrente

Oltre a verificare l'equazione di continuità, la funzione di corrente gode di due ulteriori proprietà notevoli,illustrate nel seguito.

1) *La funzione di corrente è costante sulle linee di flusso.*

Infatti si ricorda che l'equazione di una linea di flusso, introdotta nel cap.1, è data da

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}\,y}{v_y} \;\rightarrow\; v_y\,\mathrm{d}\,x - v_x\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{3.121}$$

d'altra parte si ha

$$\mathrm{d}\,\Psi = \frac{\mathrm{d}\,\Psi}{\mathrm{d}\,x}\mathrm{d}\,x + \frac{\mathrm{d}\,\Psi}{\mathrm{d}\,y}\mathrm{d}\,y = -v_y\,\mathrm{d}\,x + v_x\,\mathrm{d}\,y \tag{3.122}$$

e confrontando le due espressioni si ottiene che dΨ = 0 su una linea di flusso.

2) *La portata volumetrica di fluido che scorre tra due linee di corrente è data dalla differenza dei valori della funzione sulle linee stesse.*

Infatti, considerando due linee di corrente distanti un infinitesimo e detta q la portata volumetrica si ha, con riferimento alla Fig.3.1

$$\mathrm{d}\,q = v_x\,\mathrm{d}\,y - v_y\,\mathrm{d}\,x = \frac{\mathrm{d}\,\Psi}{\mathrm{d}\,y}\mathrm{d}\,y + \frac{\mathrm{d}\,\Psi}{\mathrm{d}\,x}\mathrm{d}\,x = \mathrm{d}\,\Psi \tag{3.123}$$

e integrando

$$q = \int_{\Psi_2}^{\Psi_2} \mathrm{d}\,\Psi = \Psi_2 - \Psi_1 \qquad (3.124)$$

3) *La velocità media del fluido è più alta nelle regioni in cui le linee di corrente si addensano.*

Infatti, considerando un insieme di linee di corrente corrispondenti ad incrementi costanti di **Ψ**, la portata volumetrica che scorre tra due linee contigue è costante, in forza della precedente osservazione 2); pertanto, dove le linee si avvicinano e la sezione di passaggio decresce, la velocità media del fluido deve aumentare.

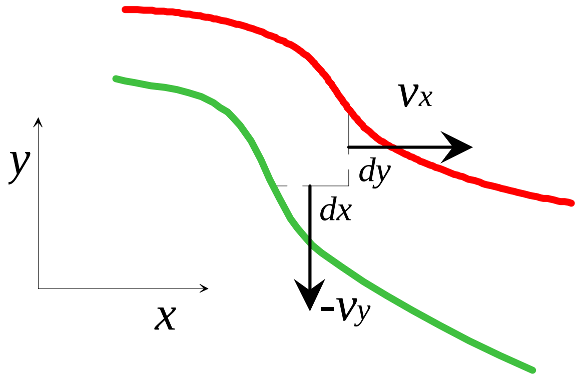


Figura 3.1: Portata volumetrica tra due linee di corrente.

E' da notare che la funzione di corrente è definibile per *qualunque moto bidimensionale incomprimibile*, indipendentemente dalle altre proprietà del moto (ed in particolare che sia o meno irrotazionale) e dalle proprietà del fluido (e in particolare dal fatto che sia viscoso o meno). Nel seguito vengono date le espressioni in coordinate cilindriche e sferiche.

Funzione di corrente in coordinate cilindriche e sferiche

La funzione di corrente è definibile anche per moti bidimensionali in coordinate cilindriche e sferiche, come risulta nel seguito ed è facilmente verificabile.

Coordinate cilindriche (r, ϑ)

Equazione di continuità

$$\mathrm{div}\,\underline{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} = 0 \qquad (3.125)$$

Funzione di corrente

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \\ v_\vartheta = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases} \qquad (3.126)$$

Coordinate sferiche (r, ϑ)

Equazione di continuità

$$\mathrm{div}\,\underline{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(v_\vartheta \sin\vartheta\right) + \cancel{\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}} = 0 \qquad (3.127)$$

Funzione di corrente

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{1}{r^2\sin\vartheta}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\vartheta} \\ v_\vartheta = -\dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial\Psi}{\partial r} \end{cases} \qquad (3.128)$$

BIBLIOGRAFIA

S.J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Dover, 1993.
N.E. Todreas, M.S. Kazimi, *Nuclear Systems I – Thermalhydraulic Fundamentals*, Taylor & Francis, 1989, cap.4.
D.J. Tritton, *Physical Fluid Dynamics*, 2nd ed., Oxford, 1988.
C.A.J. Fletcher, *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, vol.1, Springer, 1991.
S. Whitaker, *Introduction to Fluid Mechanics*, Krieger, 1992.

APPENDICE 3.1 – Invariante del moto in un caso più generale.

Consideriamo l'equazione locale di continuità

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \,\mathrm{div}\, \underline{v} = 0 \qquad (3.129)$$

e l'equazione locale di bilancio dell'energia totale

$$\rho \frac{Du_0}{Dt} = -\,\mathrm{div}\, q'' + q''' + \mathrm{div}\,(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}) - \mathrm{div}\,(p\,\underline{v}) + \underline{v} \cdot \rho \underline{f}\,' \qquad (3.130)$$

supponiamo inoltre che le forze di massa ammettano un potenziale indipendente dal tempo, ($\partial\psi / \partial t = 0$) per cui

$$\underline{f}\,' = -\,\mathrm{grad}\,\psi \qquad \rightarrow \qquad \underline{v} \cdot \rho\, \underline{f}\,' = -\rho\, \underline{v} \cdot \mathrm{grad}\,\psi = -\rho \frac{D\psi}{Dt} \qquad (3.131)$$

e che il fluido sia non viscoso e non conduttore, ovvero

$$\underline{\underline{T}} = \underline{q}'' = q''' = 0 \qquad (3.132)$$

quest'ultima ipotesi equivale ad ipotizzare che il moto sia *isoentropico*.
Nelle ipotesi suddette la (3.130) diviene

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(u + \frac{v^2}{2} + \psi \right) = -\,\mathrm{div}\,(p\,\underline{v}) \qquad (3.133)$$

D'altra parte, sfruttando la (3.129), si può scrivere che

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\,(p\,\underline{v}) = p\,\mathrm{div}\,(\underline{v}) + \underline{v} \cdot \mathrm{grad}\, p = -\frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \underline{v} \cdot \mathrm{grad}\, p = \\ &-\frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{\partial p}{\partial t} = \rho\left(-\frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} \right) - \frac{\partial p}{\partial t} = \rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \qquad (3.134)$$

da cui ponendo $\partial p / \partial t = 0$ si ha infine

$$\frac{D}{Dt}\left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \psi \right) = \frac{D}{Dt}(H) = 0 \qquad (3.135)$$

La suddetta equazione ci dice che , in assenza di dissipazione e flussi termici, la quantità H è un *invariante del moto* e si mantiene costante lungo un cammino materiale (punto di vista lagrangiano), ovvero la particella mantiene costante la somma della sua energia interna, cinetica, potenziale e di pressione "trasferendo" semplicemente energia da una forma all'altra, ad esempio incrementando la sua velocità a spese della pressione (oppure dell'energia interna, e quindi della temperatura). Le ipotesi in base alle quali la (3.135) è stata ottenuta sono:

- il fluido è non viscoso e non conduttore, (3.132), (ovvero il moto è isoentropico);
- le forze di massa ammettono un potenziale indipendente dal tempo ($\partial\psi / \partial t = 0$);
- il campo di pressione è stazionario ($\partial p / \partial t = 0$).

APPENDICE 3.2 – Andamento della pressione lungo le linee di flusso.

In questa appendice ci proponiamo di determinare le variazioni di pressione in un sistema di riferimento solidale con le linee di flusso. A tal fine, data una linea di flusso, consideriamo il sistema di riferimento costituito da

- il versore tangenziale $\underline{t}$, parallelo alla streamline ed orientato in direzione del moto,
- il versore normale $\underline{n}$, perpendicolare alla streamline e giacente nel suo piano di curvatura, orientato verso il centro di curvatura,
- il versore binormale $\underline{b}$, perpendicolare ai due precedenti e orentato secondo la regola della mano destra (ovvero $\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$).

Ovviamente in tale sistema di riferimento l'unica componente di velocita non nulla è quella tangenziale, ovvero

$$v_t = v \quad , \quad v_n = 0 \quad , \quad v_b = 0 \tag{3.136}$$

Le componenti della vorticità valgono (verificarlo richiede un po' di pazienza, v. Panton)

$$\zeta_t = v\, \underline{t} \cdot \mathrm{rot}\, \underline{t} \quad , \quad \zeta_n = \frac{\partial v}{\partial b} \quad , \quad \zeta_b = \frac{v}{R} - \frac{\partial v}{\partial n} \tag{3.137}$$

dove R è il raggio di curvatura della streamline.
Ripartiamo dall'equazione (3.116), per un moto stazionario, rielaborata come segue

$$\begin{aligned} &\mathrm{grad}\, H = \underline{v} \times \underline{\zeta} + \upsilon \nabla^2 \underline{v} \\ &H = \frac{p}{\rho} + \psi + \frac{v^2}{2} \end{aligned} \tag{3.138}$$

Ovvero, ricordando che nel caso di moto incomprimibile $\upsilon \nabla^2 \underline{v} = -\upsilon\, \mathrm{rot}\, \underline{\zeta}$

$$\mathrm{grad}\, H = \underline{v} \times \underline{\zeta} - \upsilon\, \mathrm{rot}\, \underline{\zeta} \tag{3.139}$$

Proiettiamo ora la (3.139) nelle tre direzioni suddette, tenendo conto che, in forza delle (3.136) e (3.137) e della definizione di prodotto vettoriale, le componenti di $\underline{v} \times \underline{\zeta}$ sono

$$(\underline{v} \times \underline{\zeta})_t = 0 \quad , \quad (\underline{v} \times \underline{\zeta})_n = -\frac{v^2}{R} + v \frac{\partial v}{\partial n} \quad , \quad (\underline{v} \times \underline{\zeta})_b = v \frac{\partial v}{\partial b} \tag{3.140}$$

In direzione tangenziale si ha $\underline{t} \cdot \underline{v} \times \underline{\zeta} = 0$, dato che $\underline{t}$ e $\underline{v}$ sono paralleli; per cui

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\, \upsilon\, \mathrm{rot}\, \underline{\zeta} \cdot \underline{t} \tag{3.141}$$

quindi lungo le streamlines le uniche variazioni di H sono dovute alla viscosità (che può sia incrementare che decrementare H). Per $\upsilon = 0$ la (3.141) restituisce la equazione di Bernoulli lungo una streamline, Eq.(3.100).
La componente lungo $\underline{n}$ vale

$$\frac{\partial H}{\partial n} = -\frac{v^2}{R} + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \upsilon \operatorname{rot} \underline{\zeta} \cdot \underline{n} \qquad (3.142)$$

e rielaborando si ha

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{p}{\rho} + \psi\right) = -\frac{v^2}{R} + \upsilon \operatorname{rot} \underline{\zeta} \cdot \underline{n} \qquad (3.143)$$

Da cui si vede che la pressione in direzione normale cambia per effetto della forza centrifuga, oltre che a causa della viscosità e delle forze di massa. La pressione al centro di un vortice è inferiore di quella ai lati a causa della forza centrifuga.
Infine in direzione binormale si ha

$$\frac{\partial H}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \upsilon \operatorname{rot} \underline{\zeta} \cdot \underline{b} \qquad (3.144)$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{p}{\rho} + \psi\right) = \upsilon \operatorname{rot} \underline{\zeta} \cdot \underline{b} \qquad (3.145)$$

In assenza di viscosità e di forze di massa, quindi, la pressione non cambia in direzione binormale. Si ricorda che nei moti piani la direzione binormale è perpendicolare al piano del moto.