

IL CREEPING FLOW: LA SFERA DI STOKES

DEFINIZIONE DEL PROBLEMA

Una sfera di raggio a investita da un fluido newtoniano con velocità uniforme \underline{U} , a basso numero di Reynolds (creeping flow). Moto stazionario.

Le equazioni del moto sono:

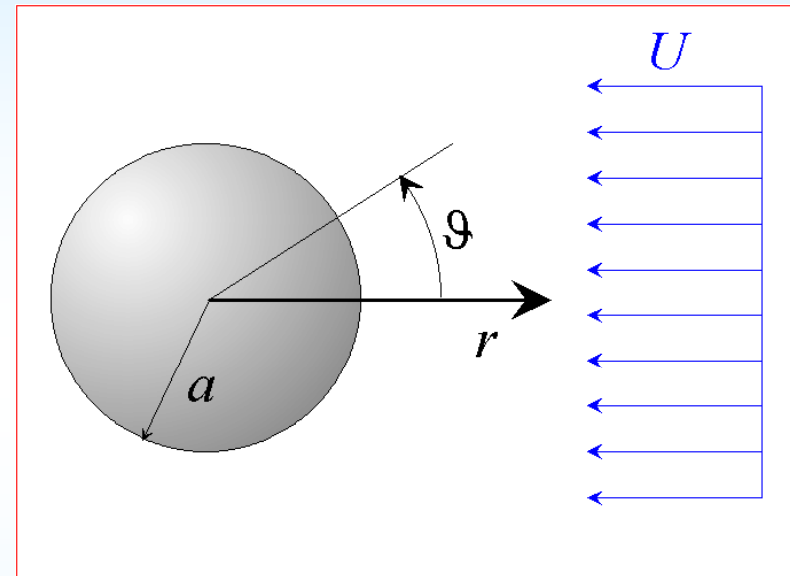
$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{v} = 0 \\ \operatorname{grad} p = \mu \nabla^2 \underline{v} \end{cases}$$

Per simmetria si ha, in un sistema di coord. sferiche con asse parallelo a \underline{U}

$$v_\varphi = 0$$

E condizioni al contorno

$$\begin{cases} v_r = v_\vartheta = 0 & r = a \\ \underline{v} \rightarrow \underline{U} & r \rightarrow \infty \end{cases}$$



In alternativa a N-S si può usare l'equazione di vorticità, che a basso Re diviene

$$\nabla^2 \underline{\zeta} = 0$$

Da questa deriva che il flusso è simmetrico (se \underline{v} è soluzione, lo è anche $-\underline{v}$); da N-S deriva poi che il campo di pressione è antisimmetrico.

FUNZIONE DI CORRENTE

Dato che il moto è bidimensionale e incomprimibile, ammette una funzione di corrente Ψ . In coordinate sferiche le componenti di velocità sono

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \\ v_\vartheta = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione di vorticità si ottiene (con molti passaggi)

$$E^2 (E^2 \Psi) = 0$$

$$\text{dove } E^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \right)$$

E le corrispondenti condizioni al contorno

$$\Psi = 0 \quad r = a \quad (v_r = 0 \text{ per } r = a)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad r = a \quad (v_\vartheta = 0 \text{ per } r = a)$$

$$\Psi \rightarrow -\frac{r^2}{2} U \sin^2 \vartheta \quad r \rightarrow \infty \quad (\underline{v} \rightarrow \underline{U} \text{ per } r \rightarrow \infty)$$

CAMPO DI VELOCITA' E VORTICITA'

La soluzione generale ha la forma

$$\psi = a^2 U^2 \sin^2 \vartheta \left[C_{-1} \left(\frac{r}{a} \right)^{-1} + C_1 \left(\frac{r}{a} \right) + C_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + C_4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 \right]$$

dopp. sferico "stokeslet" moto unif.

Dove si riconoscono alcune funzioni di corrente già viste. Il cosiddetto "stokeslet" è invece una novità e non è irrotazionale.

Imponendo le condizioni al contorno si ha

$$C_{-1} = -\frac{1}{4}, \quad C_1 = \frac{3}{4}, \quad C_2 = -\frac{1}{2}, \quad C_4 = 0$$

Sostituendo, si ha per le velocità ed il modulo della vorticità

$$v_r = U \cos \vartheta \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^{-3} + \frac{3}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^{-1} - 1 \right]$$

$$v_{\vartheta} = U \sin \vartheta \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{r}{a} \right)^{-3} - \frac{3}{4} \left(\frac{r}{a} \right)^{-1} + 1 \right]$$

$$\zeta = \frac{U}{a} \sin \vartheta \left(\frac{r}{a} \right)^{-2}$$

CAMPO DI PRESSIONE

Le derivate del campo di pressione si ottengono da N-S

$$\text{grad } p = \mu \nabla^2 \underline{v} = \mu \text{rot } \underline{\zeta}$$

dopodichè il campo di pressione può essere ottenuto integrando

$$p(r, \vartheta) - p_0 = \int_{\infty, \vartheta=0}^r \frac{\partial p}{\partial r} dr + \int_{0, r=\text{cost}}^{\vartheta} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} d\vartheta = \frac{3}{2} \frac{\mu U}{a} \cos \vartheta \left(\frac{r}{a} \right)^{-2}$$

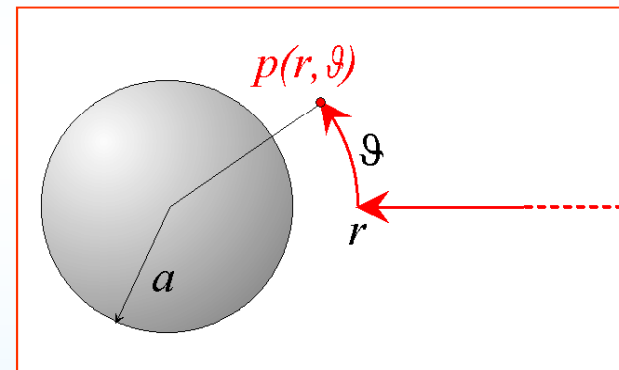
La pressione relativa è positiva per $\vartheta < 90^\circ$ e negativa per $\vartheta > 90^\circ$. Ai punti di ristagno si ha

$$p_R - p_0 = \pm \frac{3}{2} \frac{\mu U}{a}$$

Oppure, introducendo la pressione dinamica

$$\frac{p_R - p_0}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \pm \frac{6}{Re_D}$$

Ma attenzione! Così facendo si introduce un'apparente dipendenza dalla densità che in realtà non esiste.



TENSIONI DEVIATORICHE

Per completare l'analisi delle forze resistenti, è necessario determinare le tensioni deviatoriche. Su una superficie solida, *le componenti normali delle tensioni deviatoriche sono nulle*. Infatti, limitandosi per semplicità al caso di coordinate cartesiane, sulla superficie solida (piano x,z) si ha

$$x=0, v_y=v_z=0 \rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Dall'equazione di continuità, quindi, anche $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$

E quindi per $x=0$ $\tau_{i,i} = \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \forall i$

Per quanto riguarda le tensioni di taglio, per simmetria $\tau_{r,\varphi} = \tau_{\varphi,\varphi} = 0$

$$\tau_{r,\vartheta} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{\vartheta}}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \right] = \frac{3 \mu U}{2 a} \sin \vartheta \left(\frac{r}{a} \right)^{-4}$$

Sulla superficie ($r = a$)

$$\tau_{r,\vartheta} = \frac{3 \mu U}{2 a} \sin \vartheta$$

CALCOLO DELLA FORZA RESISTENTE

La forza resistente sulla sfera è data da

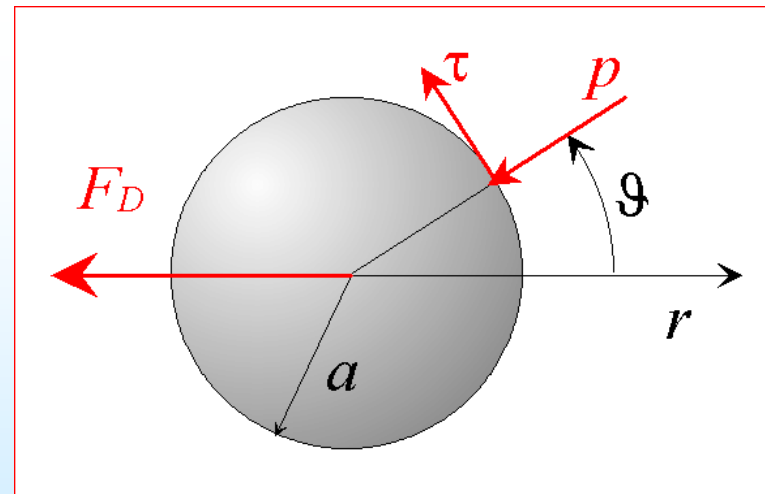
$$\begin{aligned} F_D &= \iint_A (p \cos \vartheta + \tau_{r\vartheta} \sin \vartheta) dA = \int_0^\pi (p \cos \vartheta + \tau_{r\vartheta} \sin \vartheta) 2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= 2\pi\mu U a \quad + \quad 4\pi\mu U a \quad = 6\pi\mu U a \\ &\quad \text{form drag (1/3)} + \quad \text{skin drag (2/3)} \end{aligned}$$

Nel creeping flow, la forza di attrito dipende solo dalla viscosità e non dalla densità, e varia linearmente con U .

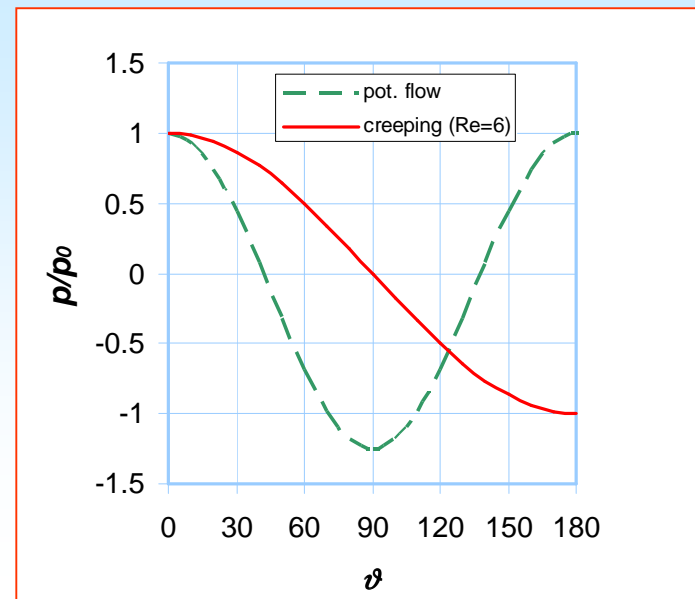
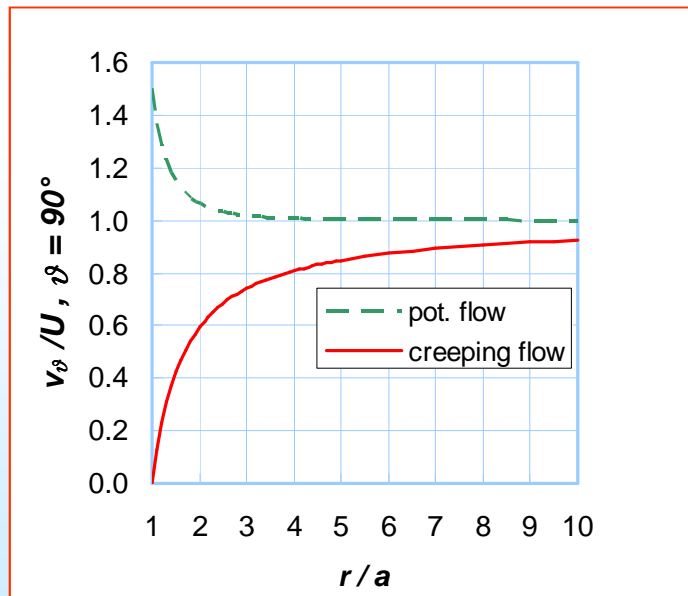
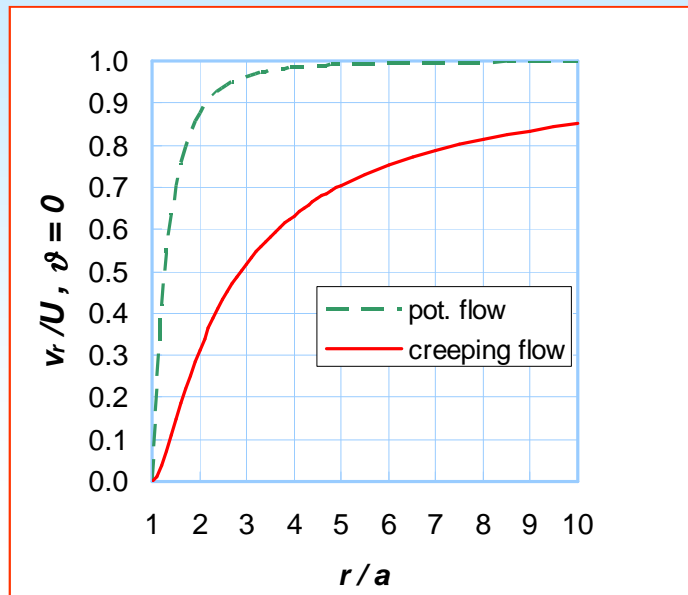
Introducendo il coefficiente di resistenza C_D

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{\rho U^2}{2} A_\perp} = \frac{2 F_D}{\rho U^2 \pi a^2} = \frac{24}{Re_D}$$

Anche in questo caso, l'introduzione di Re fa apparire una falsa dipendenza da ρ



CONFRONTO TRA CREEPING FLOW E MOTO POTENZIALE



Andamento della pressione sulla superficie

Andamento delle velocità per $\vartheta = 0$ e $\vartheta = 90^\circ$

IL CASO DELLA SFERA FLUIDA

Nel caso di sfera fluida (bolle o gocce), la condizione all'interfaccia è data da:

- continuità della velocità (di valore diverso da zero);
- continuità della tensione di taglio.

$$v_{\vartheta,1} = v_{\vartheta,2}$$

$$\tau_{r\vartheta,1} = \tau_{r\vartheta,2} \quad \rightarrow \quad \mu_1 \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{\vartheta,1}}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{r,1}}{\partial \vartheta} \right]_{r=a} = \mu_2 \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{\vartheta,2}}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{r,2}}{\partial \vartheta} \right]_{r=a}$$

La soluzione è stata trovata indipendentemente da Hadamard e Rybczynski nel 1911 e vale

$$C_D = \frac{8}{Re_D} \left(\frac{2+3k}{1+k} \right), \quad k = \frac{\mu_{int}}{\mu_{ext}}$$

In particolare, per una bolla di gas in un liquido ($k \cong 0$) $C_D = \frac{16}{Re_D}$

E per la sfera solida ($k \rightarrow \infty$) si ritrova $C_D = \frac{24}{Re_D}$

CREEPING FLOW IN ALTRE GEOMETRIE: CILINDRO

Nel caso del cilindro (e degli altri corpi bidimensionali) non esiste una funzione di corrente in forma chiusa come per la sfera che soddisfi contemporaneamente le condizioni asintotiche all'infinito e quelle di no-slip sulla superficie.

La soluzione viene ottenuta con l'approssimazione di Oseen, ponendo $\underline{v} = \underline{U}$ nei termini convettivi dell'equazione di N-S, ovvero risolvendo

$$\rho \underline{U} \cdot \text{grad } \underline{v} = -\text{grad } p + \mu \nabla^2 \underline{v}$$

Il coefficiente di drag si esprime come una serie e vale (Panton, p.606)

$$C_D = \frac{4\pi}{Re_D} \left[\left(\ln \frac{3.703}{Re} \right)^{-1} - 0.87 \left(\ln \frac{3.703}{Re} \right)^{-3} + \dots \right]$$

Notare che in questo caso la forza viscosa dipende sempre dalla densità.

Altri casi notevoli di creeping flow sono illustrati in Panton, *Incompressible Flow*, Wiley, cap. 21.

ESEMPIO – Velocità di sedimentazione

Particelle ferrose, $\rho_s = 7800 \text{ kg/m}^3$, $a = 0.1 \text{ mm}$

Recipiente con olio, $\mu = 0.5 \text{ Pa s}$, $\rho_f = 800 \text{ kg/m}^3$, altezza $H = 0.5 \text{ m}$

TROVARE: *tempo di sedimentazione delle particelle*

Calcolo della velocità di regime U_T di una particella che cade in un fluido:

$$\rho_s V g = \rho_f V g + 6\pi\mu U_T a$$

forza peso = forza di Arch. + forza di drag

$$U_T = \frac{2(\rho_s - \rho_f)g}{9\mu} a^2 = 0.3 \text{ mm/s}$$

Quindi, trascurando il transitorio iniziale e le interazioni tra particelle e con le pareti

$$T_s \cong \frac{H}{U_T} = 1638 \text{ s}$$

Calcolo di Re per verificare che sia applicabile il creeping flow:

$$Re_D = \frac{\rho_f U_T (2a)}{\mu} = 0.0001 \text{ (OK)}$$

SIMILITUDINE E ANALISI DIMENSIONALE

INTRODUZIONE

Adimensionalizzare: trasformare le variabili del problema in grandezze prive di dimensione dividendole per opportuni *fattori di scala*.

Analisi dimensionale: tecnica che consente di individuare le dipendenze funzionali dei fenomeni da variabili fisiche e geometriche basandosi su considerazioni di *omogeneità dimensionale*.

Vantaggi della adimensionalizzazione:

- *relazioni più semplici*, con minor numero di parametri;
- *compattazione degli ordini di grandezza*: in genere le variabili adimensionalizzate (velocità, pressione, temperatura) hanno valori dell'ordine dell'unità; ciò porta a vantaggi in termini di calcolo numerico.
- *valutazione dell'importanza dei termini all'interno delle equazioni*: se un termine adimensionale è piccolo ha poca influenza sul fenomeno;
- *leggi di scala*: possibilità di stabilire criteri di similitudine; maggiore "universalità" delle relazioni ottenute.
- *nella sperimentazione*: riduzione del numero di parametri da variare, riduzione del numero di esperimenti da fare; possibilità di fare esperimenti significativi in scala ridotta.

IL TEOREMA PI GRECO DI BUCKINGHAM

Dimensione di riferimento: una delle dimensioni fondamentali della fisica: massa, lunghezza, tempo, temperatura (M L T Θ) oppure forza, lunghezza, tempo, temperatura (F L T Θ).

Gruppo adimensionale o gruppo pi greco: un gruppo (monomio) di variabili fisiche disposte in modo da non avere dimensioni, es. il numero di Reynolds.

Teorema di Buckingham

Se una equazione in K variabili *indipendenti* è dimensionalmente omogenea, e R è il *minimo* numero di dimensioni di riferimento richieste per descrivere le variabili stesse, l'equazione può essere ridotta ad una relazione tra $K-R$ gruppi adimensionali (gruppi pi greco).

$$u_1 = f(u_2, u_3, \dots, u_K) \quad \rightarrow \quad \pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{K-R})$$

ALCUNE OSSERVAZIONI DI METODO

Arbitrarietà: l'analisi dimensionale presenta molti aspetti (selezione delle variabili, scelta dei gruppi) soggetti a *valutazione arbitraria*.

Selezione delle variabili: sono variabili fisiche (grandezze, proprietà fisiche), geometriche (dimensioni caratteristiche, forma), effetti esterni (gravità, campi elettrici, etc.). La scelta è dettata fondamentalmente dall'esperienza e dalla comprensione dei fenomeni, ma anche dall'analisi delle leggi fisiche che governano il fenomeno (es., le equazioni di Navier-Stokes).

Scelta delle dimensioni di riferimento: il minimo numero di dimensioni necessarie per descrivere il fenomeno; quindi vanno scelte tra le dimensioni fondamentali della fisica; generalmente sono 3 (problemi meccanici) o 4 (problemi termici); si può scegliere tra il sistema SI (massa, lunghezza, tempo, temperatura) oppure il sistema tecnico (forza, lunghezza, tempo, temperatura).

Scelta dei gruppi adimensionali: anche questa è arbitraria, sebbene esistano dei criteri razionali per definirli (v. es. Munson); conviene scegliere i gruppi tradizionali che si usano in fisica o comunque gruppi che abbiano un significato fisico (v. in seguito).

GRUPPI ADIMENSIONALI FONDAMENTALI

Problemi dinamici:

Reynolds (Re)	$Re = \frac{\rho v L}{\mu}$	$\frac{\text{f. inerzia}}{\text{f. viscosse}}$	importante in tutte le applicazioni
Froude (Fr)	$Fr = \frac{v}{\sqrt{g L}} \text{ opp. } \frac{v^2}{g L}$	$\frac{\text{f. inerzia}}{\text{f. gravitaz}}$	flussi con superfici libere o forze gravitazionali
Eulero (Eu)	$Eu = \frac{p}{\rho v^2} \text{ opp. } \frac{2 p}{\rho v^2}$	$\frac{\text{f. pressione}}{\text{f. inerzia}}$	problemi con differenze di pressione
Weber (We)	$We = \frac{\rho v^2 L}{\sigma}$	$\frac{\text{f. inerzia}}{\text{f. tens. sup.}}$	problemi con interfacce (tensione superficiale)
Mach (M)	$M = \frac{v}{c}$	$\frac{\text{f. inerzia}}{\text{comprimib.}}$	problemi in cui la comprimibilità è importante
Strouhal (St)	$St = \frac{L}{v T} \text{ opp. } \frac{\omega L}{v}$	$\frac{\text{inerzia loc.}}{\text{inerzia conv.}}$	moti non stazionari e/o oscillatori

GRUPPI ADIMENSIONALI FONDAMENTALI

Problemi termici:

Prandtl (Pr)	$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} = \frac{\nu}{a}$	$\frac{\text{diff. q.d.m.}}{\text{diff. termica}}$	problemi di strato limite
Nusselt (Nu)	$Nu = \frac{h_c L}{\lambda_f}$	$\frac{\Delta T \text{ parete}}{\Delta T \text{ medio}}$	convezione forzata e naturale
Eckert (Ec)	$Ec = \frac{v^2}{c_p \Delta T}$	$\frac{\text{en. cinetica}}{\text{en. interna}}$	moti ad alta velocità o con dissip. viscosa significativa
Biot (Bi)	$Bi = \frac{h_c L}{\lambda_s}$	$\frac{\Delta T \text{ interno}}{\Delta T \text{ esterno}}$	transitori conduttivi in corpi raffreddati
Grashof (Gr)	$Gr = \frac{\beta g \Delta T L^3}{\nu^2}$	$\frac{\text{f. galleggiam.}}{\text{f. viscose}}$	convezione naturale

IL TEOREMA PI GRECO DI BUCKINGHAM: ESEMPIO 1

Velocità terminale di caduta di un grave: si ipotizza

$$v = f(m, h, g)$$

Si ha $K = 4$, $R = 3$ (M, L, T, problema meccanico) $\rightarrow K - R = 1$

$$\pi_1 = v^a m^b g^c h^d$$

Quindi il seguente prodotto deve essere adimensionale

$$\left(\frac{L}{T}\right)^a (M)^b \left(\frac{L}{T^2}\right)^c (L)^d$$

Ovvero:

$$\begin{cases} L: & a + c + d = 0 \\ M: & b = 0 \\ T: & a + 2c = 0 \end{cases}$$

$$a = 1 \quad b = 0 \quad c = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{v}{\sqrt{gh}} = K \quad \rightarrow \quad v = K\sqrt{gh}$$

Da un esperimento si può ora ricavare, come è noto, che $K = \sqrt{2}$

IL TEOREMA PI GRECO DI BUCKINGHAM: ESEMPIO 2

Caduta di pressione in un condotto: si *ipotizza*

$$\Delta p = g(D, v, \rho, \mu, L)$$

Si ha $K = 6$, $R = 3$ (M, L, T, problema meccanico) $\rightarrow K - R = 3$

Anche se vi sono dei criteri, la scelta dei gruppi adimensionali è arbitraria.
In questo caso si sceglie

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{\frac{\rho v^2}{2}} = Eu$$

$$\pi_2 = \frac{L}{D}$$

$$\pi_3 = \frac{\rho v D}{\mu} = Re$$

$$Eu = \Phi\left(Re, \frac{L}{D}\right)$$

$$\Delta p = f(Re) \frac{\rho v^2}{2} \frac{L}{D}$$

L'aggiunta di ogni ulteriore variabile (es., la rugosità del tubo ε) porta all'aggiunta di un nuovo gruppo adimensionale.

$$Eu = \Phi\left(Re, \frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

IL TEOREMA PI GRECO DI BUCKINGHAM: ESEMPIO 3

Coefficiente di convezione forzata. Si ipotizza

$$h_c = f(\rho, \mu, \lambda, c_p, v, D)$$

Si ha $K = 7, R = 4 (M, L, T, \Theta) \rightarrow K - R = 3$

Il problema è descritto da tre gruppi adimensionali; si sceglie

$$\pi_1 = \frac{h_c D}{\lambda} = Nu$$

$$\pi_2 = \frac{c_p \mu}{\lambda} = \frac{v}{a} = Pr$$

$$\pi_3 = \frac{\rho v D}{\mu} = Re$$

Quindi si ha

$$Nu = \Phi(Re, Pr) \quad \text{ad esempio} \quad Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4}$$

Dove i coefficienti sono ricavati da esperienze o da considerazioni teoriche (v. in seguito).

ADIMENSIONALIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DI N-S

Le equazioni di N-S, in caso di forze di volume gravitazionali e moto 2D

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad } v_x = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad } v_z = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

possono essere adimensionalizzate in base ad una lunghezza, una velocità ed un tempo caratteristici, $U, L, T=L/U$

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial t^*} + \underline{v}^* \cdot \text{grad } v_x^* = \frac{1}{Re} \nabla^2 v_x^* - \frac{\partial p^*}{\partial x^*}$$
$$\frac{\partial v_z^*}{\partial t^*} + \underline{v}^* \cdot \text{grad } v_z^* = \frac{1}{Re} \nabla^2 v_z^* - \frac{\partial p^*}{\partial z^*} - \frac{1}{Fr^2}$$

Dove compaiono il numero di Reynolds e Froude

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu}, \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$$

P.e. a basso Re si può trascurare il termine inerziale, ad alto Re diviene trascurabile il termine viscoso.

ADIMENSIONALIZZAZIONE DELL' EQUAZIONE DELL'ENERGIA TERMICA

L'equazione di bilancio dell'entalpia per fluido incomprimibile ($\beta=0$) e assenza di generazione volumetrica ($q'''=0$) diviene

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad} T \right) = -\text{div} q'' + \dot{D}_v$$

posto $q'' = -\lambda \text{grad} T$ e sviluppando la dissipazione viscosa (fluido newt.no)

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad} T \right) = \lambda \nabla^2 T +$$

$$+ \mu \left[2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right]$$

Si adimensionalizza sulla base di *massa, lunghezza e tempo* e su un ΔT *caratteristico* (la temperatura compare solo come variazione)

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \underline{v}^* \cdot \text{grad} T^* = \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 T^* + \frac{Ec}{Re} \dot{D}_v^* \quad Ec = \frac{v^2}{c_p \Delta T}$$

Se $Re Pr (= Pe, Peclet)$ è grande la conduzione è trascurabile.

Se $Ec/Re \ll 1$ la dissipazione viscosa è trascurabile.

PER APPROFONDIMENTI

- B.R. Munson, D.F. Young e T.H. Okiishi, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 4th ed., Wiley, 2002, cap.7.