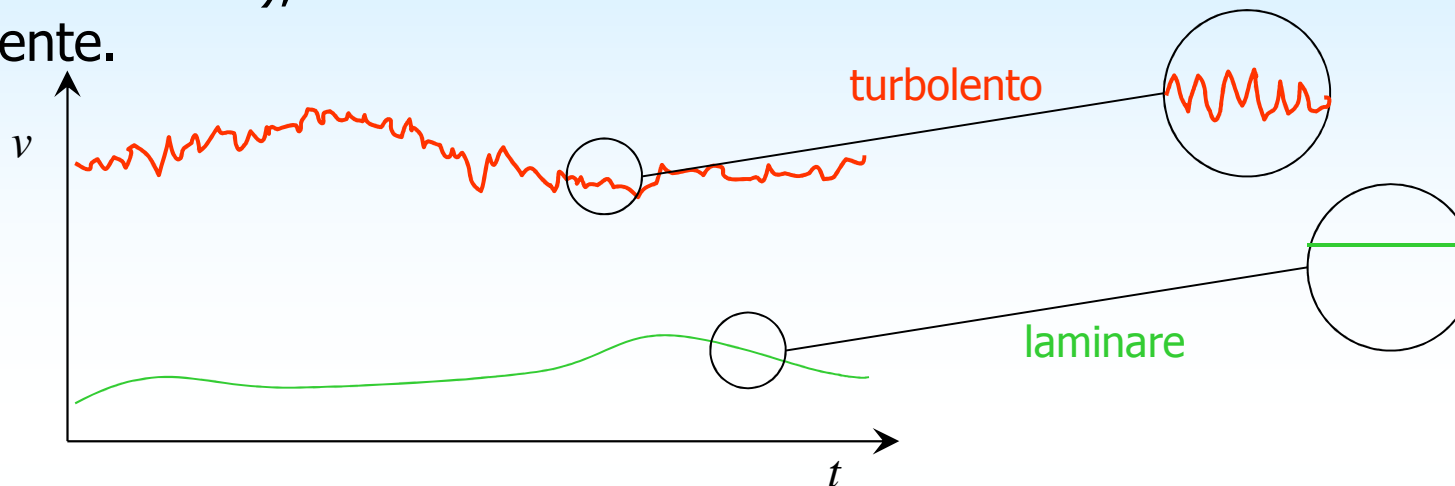


LA TURBOLENZA



NATURA DELLA TURBOLENZA

Nel moto turbolento le variabili locali (pressione, velocità, densità, temperatura) fluttuano caoticamente nel tempo, con una frequenza molto alta (100-1000 Hz), attorno ad un valore "medio" che varia invece molto più lentamente.



Se si suppone che il periodo delle oscillazioni turbolente T_t sia molto inferiore ai tempi caratteristici di evoluzione del sistema (T_s), è possibile decomporre la variabile generica φ in una componente "media" più una fluttuante (a valor medio nullo):

$$\varphi(t) = \bar{\varphi}(t) + \varphi'(t)$$

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \varphi dt \quad , \quad T_t \ll \Delta t \ll T_s$$

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \varphi' dt = 0$$

CARATTERIZZAZIONE DELLA TURBOLENZA

Per caratterizzare le fluttuazioni si usa la loro media quadratica

$$\overline{\varphi'^2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} (\varphi - \overline{\varphi})^2 dt \quad ,$$

In particolare nel caso della velocità si ha:

$$i_k = \frac{\sqrt{\overline{v_k'^2}}}{v_k} \quad \text{intensità di turbolenza per la componente } k = x, y, z$$

$$i = \frac{\sqrt{\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2}}}{\overline{v}} \quad \text{intensità di turbolenza}$$

(5-10%; può scendere a 1% in galleria del vento)

$$k = \frac{1}{2} (\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2}) = \frac{1}{2} (i \overline{v})^2 \quad \text{energia cinetica turbolenta}$$

$$c_{ij} = \overline{v_i' v_j'} \quad \text{cross-correlazione } (i, j = x, y, z)$$

PRINCIPALI TIPI DI TURBOLENZA

- TURBOLENZA ISOTROPA: le grandezze caratteristiche non variano se si cambia sistema di riferimento, in particolare $i_x = i_y = i_z$.
- TURBOLENZA OMOGENEA: le grandezze caratteristiche non variano nello spazio.
- TURBOLENZA OMOGENEA ED ISOTROPA: la situazione "ideale" per lo studio della turbolenza; è quella che si può ottenere in galleria del vento, al centro di un canale ci si avvicina a questa condizione.
- TURBOLENZA DI PARETE: la turbolenza in prossimità di una parete solida, per cui vale la condizione di no-slip; è anisotropa, la intensità di turbolenza è maggiore parallelamente alla parete.
- TURBOLENZA LIBERA: quella in un fluido non influenzato da una parete, per esempio nei getti e nelle scie.

DAL GRANDE AL PICCOLO: LA "CASCATA" DELLA TURBOLENZA

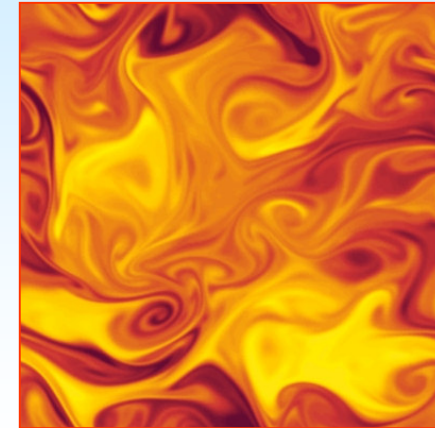
Nella turbolenza si possono identificare dei **vortici** (**eddies**), ovvero strutture in cui le variabili fluttuanti si mantengono *correlate*, es

$$c_{ij} = \overline{v_i'v_j'} \neq 0$$

Tali vortici sono alternati a zone di relativa calma dette "**patches**" in cui la intensità di turbolenza è minore: basta osservare un fiume in piena da un ponte per rendersene conto.

Maggiori sono le dimensioni delle strutture, maggiore è il loro tempo di sopravvivenza. Le strutture più grandi sono dominate *dall'inerzia* ed interagiscono con il moto medio, nelle strutture più piccole è influente la *dissipazione viscosa*.

La turbolenza consiste nel **trasferimento della energia cinetica turbolenta dalle strutture vorticosi più grandi verso quelle più piccole**, dove essa viene dissipata in calore: questa idea è dovuta originariamente a A. Kolmogorov.



Andrej Nikolaevič Kolmogorov
(1903-1987)

SCALE DI LUNGHEZZA E TEMPO NELLA TURBOLENZA

Il moto alla scala dei piccoli vortici, in cui l'energia cinetica viene dissipata in calore per gli effetti viscosi, è governato da

$$\varepsilon = -\frac{dk}{dt} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^3} \right] \quad \text{dissipazione di energia cinetica turbolenta per unità di massa e tempo}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad \text{viscosità cinematica (diffusività della quantità di moto)}$$

Combinando queste due grandezze si possono ricavare le *scale di tempo, lunghezza e velocità di Kolmogorov* per i piccoli vortici

$$\tau_E \approx \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} [\text{s}] ; \quad \eta \approx \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} [\text{m}] ; \quad v_E \approx \frac{\eta}{\tau_E} = (\nu\varepsilon)^{1/4} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Si può anche verificare che il numero di Reynolds dei vortici (eddies) ha un valore prossimo ad 1:

$$Re_E = \frac{v_E \eta}{\nu} \simeq 1$$

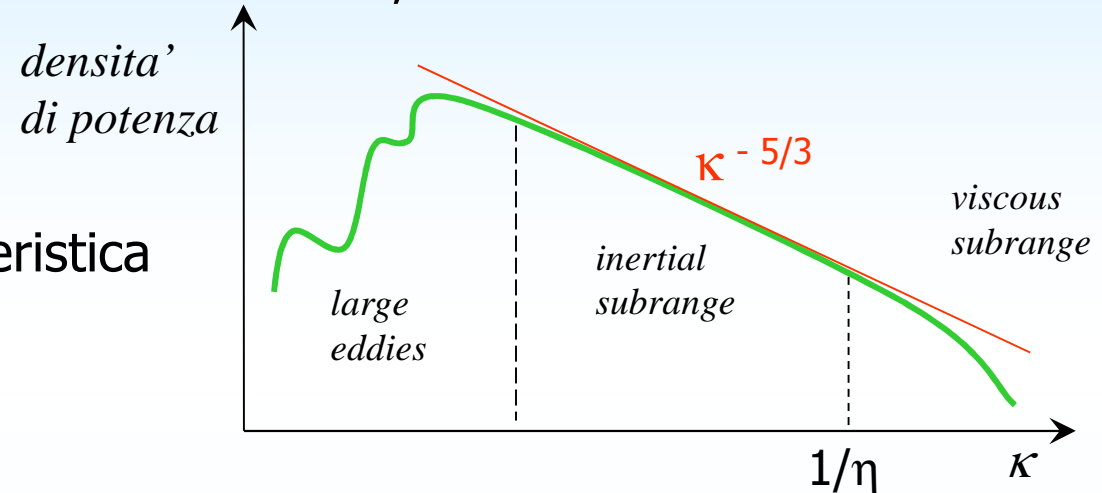
Per i vortici grandi, invece Re_E è dell'ordine di quello del moto medio.

DISTRIBUZIONE SPETTRALE DELLA TURBOLENZA

La variazione temporale delle fluttuazioni turbolente può essere decomposta tramite la trasformata di Fourier nel suo spettro di potenza, che indica la distribuzione della energia cinetica turbolenta in funzione della frequenza delle fluttuazioni, oppure del loro *numero di onda* κ , definito da

$$\kappa = \frac{2\pi f}{U} \quad [\text{m}^{-1}]$$

dove U è una velocità caratteristica (velocità del moto medio).



Nello spettro (bilogarithmico) si possono identificare tre regioni:

- la regione in cui la turbolenza trae energia dal moto medio, in cui $1/\kappa$ è dell'ordine delle dimensioni dei grandi vortici (*large eddies*);
- la regione in cui predomina il trasferimento inerziale (*inertial subrange*), in cui lo spettro è proporzionale a $\kappa^{-5/3}$ (*legge universale della turbolenza di Kolmogorov*);
- la regione di dissipazione viscosa per $\kappa > 1/\eta$ (v. slide prec.).

METODI DI SOLUZIONE NUMERICA

- **METODO DI SIMULAZIONE NUMERICA DIRETTA (DNS):** si procede direttamente alla integrazione numerica delle equazioni di N-S. In teoria, questo permetterebbe di ottenere dati molto più dettagliati di qualunque esperimento. Tuttavia per una soluzione accurata bisogna risolvere il problema a tutte le scale di lunghezza (dalla dimensione del condotto a quella di Kolmogorov) e dei tempi (dal moto medio alle fluttuazioni turbolente): questo porta ad un problema computazionale formidabile, attualmente risolvibile fino a numeri di Reynolds non troppo alti (~ 40000).
- **LARGE EDDY SIMULATION (LES):** si supera il problema della integrazione su piccola scala risolvendo il moto solo alle scale di lunghezza e tempo dei grandi vortici (*large eddies*) che interagiscono significativamente con il moto medio; alle scale più piccole, dove la turbolenza ha caratteristiche maggiormente "universali" si usano modelli costitutivi aggiuntivi, basati (ad esempio) sulla viscosità turbolenta. Occorrono adeguate procedure di filtro per separare le grandi scale dalle piccole.
- **METODI RANS (Reynolds-averaged Navier-Stokes):** si usa il metodo delle medie di Reynolds e i relativi modelli costitutivi, v. in seguito; attualmente l'approccio più diffuso (FLUENT, CFX, etc.)

METODO DELLE MEDIE DI REYNOLDS (RANS) - 1

Si parte dalla formulazione generale della equazione locale di bilancio

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c) + \text{div}(\rho c \underline{v}) = \text{div} \underline{J} + \rho \Phi$$

Si procede a mediare tutti i termini dell'equazione con lo stesso procedimento adottato per le variabili fluttuanti

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}(\rho c) + \text{div}(\rho c \underline{v})} = \overline{\text{div} \underline{J} + \rho \Phi}$$

$$\overline{\varphi}(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \varphi dt$$
$$T_t \ll \Delta t \ll T_s$$

Se il sistema di coordinate è fisso e i tempi sono molto maggiori di Δt si possono portare le medie all'interno delle derivate

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{(\rho c)} + \overline{\text{div}(\rho c \underline{v})} = \overline{\text{div} \underline{J} + \rho \Phi}$$

E si scompongono c , v , \underline{J} e Φ nella componente media più quella fluttuante (si considera il moto incomprimibile, $\rho = \text{cost}$)

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{[\rho(\bar{c} + c')]} + \overline{\text{div}[\rho(\bar{c} + c')(\bar{v} + \underline{v}')] } = \overline{\text{div}(\bar{J} + \underline{J}')} + \overline{\rho(\bar{\Phi} + \Phi')}$$

METODO DELLE MEDIE DI REYNOLDS (RANS) -2

Nello sviluppare le medie e i prodotti delle componenti medie e fluttuanti si tiene conto delle seguenti regole:

$$\overline{\bar{c} c'} = 0 \quad ; \quad \overline{c'} = 0 \quad ; \quad \overline{c'_1 c'_2} \neq 0$$

Per cui si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{c}) + \text{div}(\rho \bar{c} \underline{\bar{v}}) = \text{div} \underline{\bar{J}} + \rho \bar{\Phi} - \text{div}(\rho \overline{c' \underline{v}'})$$

ovvero, compare un termine aggiuntivo che ha origine dal termine non lineare e che rappresenta *il trasporto della quantità c da parte delle fluttuazioni turbolente di velocità*.

Le tre equazioni fondamentali divengono, ricordando $\text{div}(\rho \bar{c} \underline{\bar{v}}) = \rho \underline{\bar{v}} \cdot \text{grad} \bar{c}$

MASSA $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{\bar{v}}) = 0$ (inalterata)

Q. DI MOTO $\rho \frac{\partial \underline{\bar{v}}}{\partial t} + \rho \underline{\bar{v}} \cdot \text{grad} \underline{\bar{v}} = \text{div}(\underline{\bar{T}}) - \text{grad} \bar{p} + \rho \underline{\bar{f}}' - \text{div}(\rho \overline{\underline{v}' \underline{v}'})$

ENERGIA $\rho \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial t} + \rho \underline{\bar{v}} \cdot \text{grad} \bar{u}_0 = \text{div} \left[(\underline{\bar{T}} - \bar{p} \underline{I}) \cdot \underline{\bar{v}} - \underline{\bar{q}}'' \right] + \left[\underline{\bar{q}}''' + \rho \underline{\bar{v}} \cdot \underline{\bar{f}}' \right] - \text{div}(\rho \overline{u'_0 \underline{v}'})$

TENSIONE DI REYNOLDS - VISCOSITA' TURBOLENTA

L'equazione di quantità di moto può essere riformulata come

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \text{grad } \bar{v} = \text{div} \left(\bar{T} - \rho \overline{v'v'} \right) - \text{grad } \bar{p} + \rho \bar{f}'$$

ovvero il nuovo termine può essere considerato come una componente aggiuntiva del tensore deviatorico che viene detta *tensione di Reynolds* (*Reynolds stress*)

$$\tau_{ij} = \tau_{ij,lam} + \tau_{ij,tur} \qquad \tau_{ij,tur} = -\rho \overline{v'_i v'_j}$$

Per un fluido newtoniano, si può considerare una nuova grandezza introdotta originariamente da Boussinesq nel 1877

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{v'_i v'_j} = (\mu + \rho \varepsilon_{Mij}) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

dove $\varepsilon_{Mij} = \frac{-\overline{v'_i v'_j}}{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$ è detta viscosità turbolenta (eddy viscosity)

la viscosità turbolenta è *un tensore* ed il suo valore è diverso per ogni coppia i, j : solo nel caso di turbolenza isotropa le comp. sono tutte uguali.

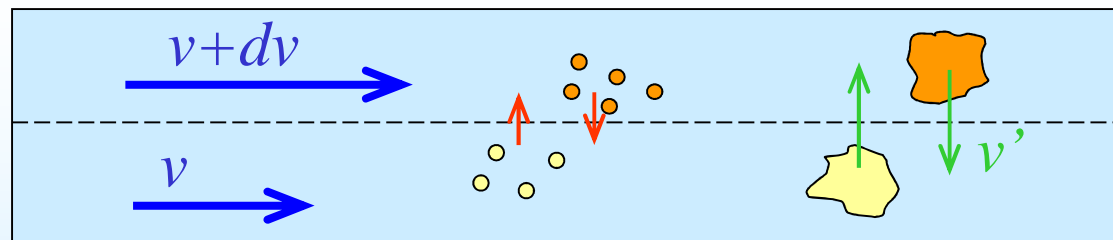
VISCOSITA' TURBOLENTE

Quindi le equazioni di N-S possono essere riformulate come

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \text{grad } \bar{v} = \text{div} [(\mu + \rho \varepsilon_M) \text{grad } \bar{v}] - \text{grad } \bar{p} + \rho \bar{f}'$$

bisogna notare che la viscosità turbolenta è una *proprietà del moto*, non del fluido, e può variare da punto a punto.

Un semplice schema mostra che, se la viscosità può essere interpretata come il *trasporto di quantità di moto dovuto alla diffusione molecolare*, che origina una tensione di taglio tra strati adiacenti di fluido



la tensione di Reynolds rappresenta l'effetto del *trasporto di quantità di moto dovuto alla turbolenza*.

DIFFUSIVITA' TERMICA TURBOLENTE

Analogamente, per l'equazione dell'energia termica (moto incomprimibile) il termine aggiuntivo può essere conglobato con il flusso termico

$$\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \text{grad} \bar{u} = \text{div} \left[-\bar{q}'' - \overline{\rho u' v'} \right] + \bar{q}''' + \varphi$$

e posto

$$\bar{u} = c_p \bar{T} \quad u' = c_p T' \quad \bar{q}'' = -\lambda \text{grad} \bar{T}$$

si può definire una diffusività termica turbolenta con le stesse caratteristiche della precedente

$$\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \text{grad} \bar{u} = \text{div} \left[(\lambda + \rho c_p \varepsilon_H) \text{grad} \bar{T} \right] + \bar{q}''' + \varphi$$

$$\varepsilon_H = - \frac{\overline{T' v'}}{\overline{\text{grad} \bar{T}}}$$

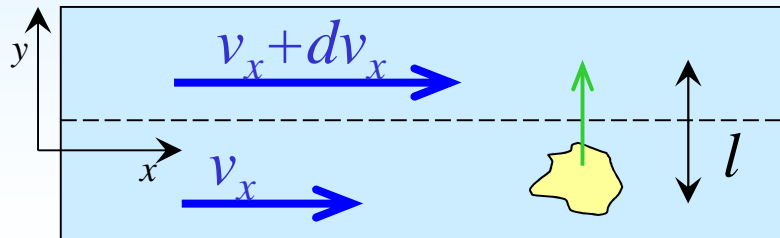
NOTA: anche per ε_H si potrebbero definire tre valori diversi su x, y e z

e conseguentemente un numero di Prandtl turbolento, che è anche esso una proprietà del moto

$$Pr_T = \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_H}$$

MODELLI DI TURBOLENZA: PRANDTL MIXING LENGTH

Il modello della *lunghezza di mescolamento di Prandtl* (1925) riprende il concetto che la tensione di taglio aggiuntiva è dovuta alla migrazione delle particelle a casusa del moto turbolento. Detta l la distanza percorsa da una particella prima di perdere la sua coerenza si ha



$$(\tau_{xy})_T = \frac{\dot{m}}{A} [v_x(y+l) - v_x(y)] = \frac{\dot{m}}{A} l \frac{dv_x}{dy}$$

La portata di fluido si può porre $\dot{m} = \rho \frac{\Delta V}{\Delta t} = c \frac{\rho l A}{\Delta t} \rightarrow (\tau_{xy})_T = c \frac{\rho l}{\Delta t} l \frac{dv_x}{dy}$

assumendo $\frac{c}{\Delta t} \approx \left| \frac{dv_x}{dy} \right|$

si ha $(\tau_{xy})_T = \rho l^2 \left| \frac{dv_x}{dy} \right| \left(\frac{dv_x}{dy} \right) \rightarrow \mu_T = \frac{(\tau_{xy})_T}{(dv_x/dy)} = \rho l^2 \left| \frac{dv_x}{dy} \right|$

ovvero più in generale $\begin{cases} (\underline{T})_T = (2\rho l^2 \sqrt{2\underline{\underline{D}} : 2\underline{\underline{D}}}) \underline{\underline{D}} \\ \mu_T = 2\rho l^2 \sqrt{2\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}} \end{cases}$

NOTA: l può variare da punto a punto

MODELLI DI TURBOLENZA: CENNI AL MODELLO $k-\varepsilon$

Sviluppato originariamente da Jones e Launder nel 1972.

Si aggiungono due equazioni di bilancio per l'energia cinetica turbolenta k e il rate di dissipazione per unità di massa, ε

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2} \right)$$

$$\varepsilon = 2\nu_M \sum_{i,j} \overline{\dot{d}'_{ij} \dot{d}'_{ij}} = 2\nu \left(\overline{\dot{d}'_{11}^2} + \overline{\dot{d}'_{22}^2} + \overline{\dot{d}'_{33}^2} + \overline{\dot{d}'_{12}^2} + \overline{\dot{d}'_{13}^2} + \overline{\dot{d}'_{23}^2} \right) \quad \dot{d}'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right)$$

Le equazioni di bilancio per queste due variabili aggiuntive sono

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v} k) = \text{div} \left(\frac{\mu_M}{\sigma_k} \text{grad } k \right) + \underbrace{2\mu_M \overline{\dot{d}'_{ij} \dot{d}'_{ij}}}_{\substack{\text{sorgente} \\ \text{(diff. turbolenta)}}} - \underbrace{\rho \varepsilon}_{\text{pozzo}}$$

variazione = diffusione

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v} \varepsilon) = \text{div} \left(\frac{\mu_M}{\sigma_\varepsilon} \text{grad } \varepsilon \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_M \overline{\dot{d}'_{ij} \dot{d}'_{ij}} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

$$\boxed{\mu_M = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \overline{\dot{d}'_{ij}}} \quad C_\mu = 0.09 \quad , \quad \sigma_k = 1.00 \quad , \quad \sigma_\varepsilon = 1.30 \quad , \quad C_{1\varepsilon} = 1.44 \quad , \quad C_{2\varepsilon} = 1.92$$

I valori delle costanti sono stati determinati con considerazioni semiempiriche

MODELLI DI TURBOLENZA: CENNO AD ALTRI MODELLI

I modelli di turbolenza, da usare in associazione al metodo RANS, si possono classificare in tre categorie:

- modelli algebrici (es. Prandtl mixing length);
- modelli a 1 equazione (attualmente poco diffusi);
- modelli a 2 equazioni (es. k - ε e k - ω).

I modelli si possono distinguere in *completi ed incompleti*: in un modello completo la lunghezza caratteristica della turbolenza è definita automaticamente, nei modelli incompleti deve essere data in input. I modelli a 0 ed 1 equazione in genere sono incompleti.

- Il modello k - ω è un modello a due equazioni simile al modello k - ε , dove però la seconda equazione riguarda il rate di dissipazione per unità di volume (ω) e i modelli costitutivi sono diversi.
- La applicazione dei modelli k - ε e k - ω in prossimità della parete (dove il numero di Reynolds turbolento è basso) può dare problemi, molti codici ricorrono in questo caso ad una "wall function" definita sulla base del profilo universale di velocità (che vedremo in seguito) oppure dei "*low Reynolds number models*" specifici.

PER APPROFONDIMENTI SUL MOTO TURBOLENTO

- Lucidi Prof. Walter Ambrosini (in rete).
- Versteeg, Malalasekera, *An introduction to computational fluid dynamics*, Pearson, ISBN 978 0 582 21884 0 (un'ottima introduzione ai metodi della CFD).

LA FUNZIONE DI CORRENTE

Consideriamo l'equazione di continuità per il *moto piano* ($v_z=0$) di un *fluido incompressibile*

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Ed una funzione Ψ detta *funzione di corrente* tale che

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases}$$

E' evidente che se a v è associata una funzione di corrente l'eq. di continuità è automaticamente verificata, infatti:

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0$$

Per essere fisicamente rilevante, la funzione di corrente deve rispettare anche le condizioni al contorno.

LA FUNZIONE DI CORRENTE IN ALTRI SISTEMI DI COORDINATE

Coordinate cilindriche, moto 2D

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} = 0$$

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \\ v_\vartheta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases}$$

Coordinate sferiche, moto 2D

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (v_\vartheta \sin \vartheta) + \cancel{\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}} = 0$$

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \\ v_\vartheta = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases}$$

PROPRIETA' DELLA FUNZIONE DI CORRENTE

1) *La funzione di corrente è costante sulle linee di flusso*

Per una linea di flusso

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \rightarrow v_y dx - v_x dy = 0$$

essendo

$$d\Psi = \frac{d\Psi}{dx} dx + \frac{d\Psi}{dy} dy = -v_y dx + v_x dy$$

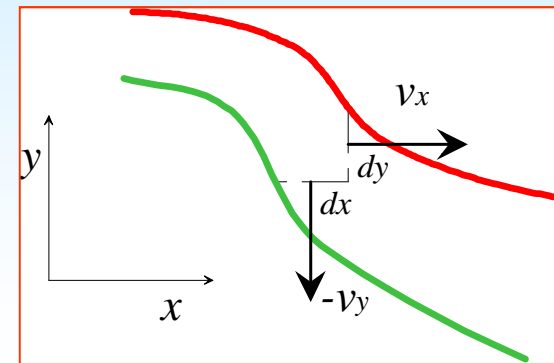
confrontando le due espressioni, si ha quindi che $d\Psi = 0$ su una linea di flusso, C.V.D.

PROPRIETA' DELLA FUNZIONE DI CORRENTE

2) *La portata volumetrica di fluido che scorre tra due linee di corrente è data dalla differenza dei valori della funzione sulle linee stesse*

Infatti (v. figura) la portata dq vale:

$$dq = v_x dy - v_y dx = \frac{d\Psi}{dy} dy + \frac{d\Psi}{dx} dx = d\Psi$$



3) *La velocità media del fluido è più alta nelle regioni in cui le linee di corrente si addensano.*

Considerando un insieme di linee di corrente corrispondenti ad incrementi costanti di Ψ , la portata volumetrica che scorre tra due linee contigue è costante: pertanto, dove le linee si avvicinano e la sezione di passaggio decresce, e la velocità media del fluido deve aumentare.

NOTA BENE: la funzione di corrente è definibile per qualunque moto bidimensionale incomprimibile, indipendentemente dalle altre proprietà del moto (ed in particolare che sia o meno irrotazionale) e del fluido (e in particolare dal fatto che sia viscoso o meno)

L'EQUAZIONE DI VORTICITÀ

Equazione di N-S (moto incomprimibile, fluido newtoniano) con forze di massa irrotazionali > conservative $f' = -\text{grad } \psi$

$$\rho \frac{D \underline{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad } \underline{v} \right) = -\text{grad } p + \mu \nabla^2 \underline{v} - \rho \text{grad } \psi$$

tenuto conto che $\underline{v} \cdot \text{grad } \underline{v} = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \underline{v} \times \text{rot } \underline{v}$

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} - \underline{v} \times \underline{\zeta} = -\text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \psi + \frac{v^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \underline{v}$$

$$\text{rot}(\underline{v} \times \underline{\zeta}) = \underline{v} \text{div } \underline{\zeta} - \underline{\zeta} \text{div } \underline{v} + \underline{\zeta} \cdot \text{grad } \underline{v} - \underline{v} \cdot \text{grad } \underline{\zeta}$$

si fa il rotore, si semplifica ricordando che

$$\text{div } \underline{v} = 0$$

$$\text{rot grad } c = 0$$

$$\text{div } \underline{\zeta} = \text{div rot } \underline{v} = 0$$

$$\frac{D \underline{\zeta}}{Dt} = \underline{\zeta} \cdot \text{grad } \underline{v} + \nu \nabla^2 \underline{\zeta}$$

variazione = cambio forma + diffusione
(twisting/stretching)

nei moti piani $\underline{\zeta} \cdot \text{grad } \underline{v} = 0$ quindi in assenza di forze viscoso o rotazionali *la vorticità si conserva*
o assialsimm.

NAVIER-STOKES EQUATIONS

For centuries, scientists have tried to find mathematical expressions for the forces which act on an object moving through a fluid (like air). In the mid-1800s, working from the calculations of Claude L. M. H. Navier of France, Sir George Stokes of Great Britain derived five equations giving a precise description of these forces. But the equations are so complex that it was (and is) nearly impossible to arrive at useful solutions. Other methods were needed to predict how well an airplane could fly.

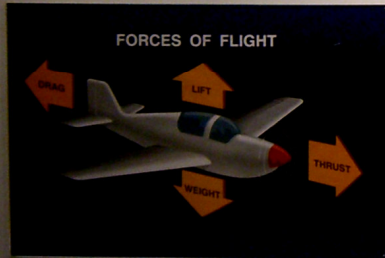
Four forces act on an airplane in flight. Aerodynamics predicts how a given plane design will fly under these combined forces.

GRAVITY: pulls the craft toward the Earth.

LIFT: created by the flow of air over the wings, counteracts gravity.

DRAG: produced by friction when a solid moves through air, slows the plane down.

THRUST: the forward motion supplied by the engines.



1. MASS CONSERVATION

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0$$
2. X-MOMENTUM CONSERVATION

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u v + \tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (\rho u w + \tau_{xz})}{\partial z} = 0$$
3. Y-MOMENTUM CONSERVATION

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u v + \tau_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^2 + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v w + \tau_{yz})}{\partial z} = 0$$
4. Z-MOMENTUM CONSERVATION

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u w + \tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v w + \tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w^2 + \tau_{zz})}{\partial z} = 0$$
5. ENERGY CONSERVATION

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(e + \tau_x)u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w - K \frac{\partial e}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [\tau_{xy}u + (e + \tau_y)v + \tau_{yz}w - K \frac{\partial e}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [\tau_{xz}u + \tau_{yz}v + (e + \tau_z)w - K \frac{\partial e}{\partial z}]$$

SYMBOLS

u = x component of fluid velocity	τ_{xx} = normal stress
v = y component of fluid velocity	τ_{yy} = shear stress
w = z component of fluid velocity	τ_{zz} = normal stress
ρ = fluid density	τ_{xy} = shear stress
e = total energy per unit volume	τ_{yz} = shear stress
τ = specific internal energy	τ_{yx} = shear stress
K = coefficient of viscosity	τ_{zx} = shear stress
p = static pressure	τ_{zy} = shear stress
ρ_0 = reference density	τ_{zy} = shear stress
ρ = dynamic density	τ_{zy} = shear stress
ρ = dynamic density	τ_{zy} = shear stress

Equations drawn by Rini Mangatha

1933
Pencil Sharpener
Raymond Loewy, Designer

1936
K45 Locomotive
Raymond Loewy, Designer



NAVIER-STOKES EQUATIONS

1. MASS CONSERVATION

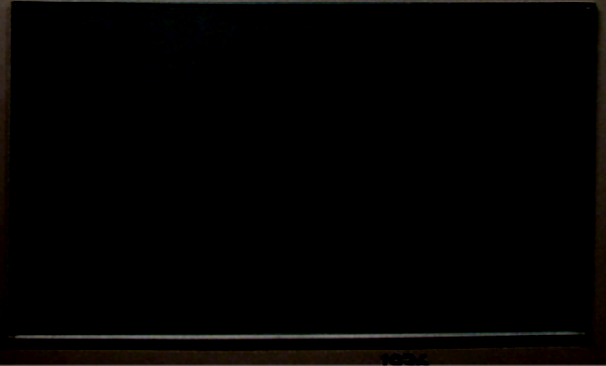
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0$$
2. X-MOMENTUM CONSERVATION

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u v + \tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (\rho u w + \tau_{xz})}{\partial z} = 0$$
3. Y-MOMENTUM CONSERVATION

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u v + \tau_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^2 + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v w + \tau_{yz})}{\partial z} = 0$$
4. Z-MOMENTUM CONSERVATION

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u w + \tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v w + \tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w^2 + \tau_{zz})}{\partial z} = 0$$
5. ENERGY CONSERVATION

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(e + \tau_x)u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w - K \frac{\partial e}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [\tau_{xy}u + (e + \tau_y)v + \tau_{yz}w - K \frac{\partial e}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [\tau_{xz}u + \tau_{yz}v + (e + \tau_z)w - K \frac{\partial e}{\partial z}]$$



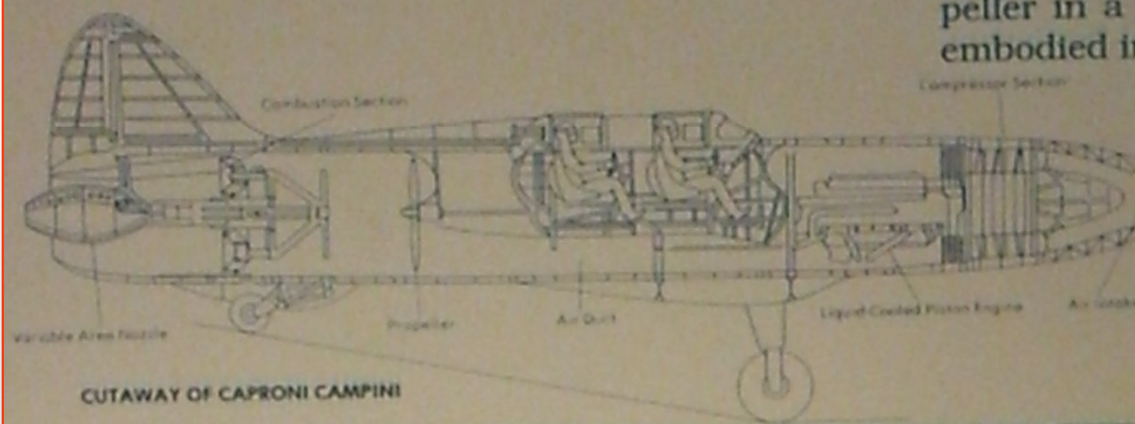


ITALY



CAPRONI-CAMPINI C.C.2, 1940

The Caproni-Campini was the first jet aircraft to be flown publicly but the second jet aircraft to fly. Its hybrid powerplant consisted of a compressor driven by a 900-horsepower Isotta-Fraschini piston engine, with a burner at the rear to provide thrust.



CUTAWAY OF CAPRONI CAMPINI

The second jet aircraft to fly but the first to be demonstrated publicly was the Caproni-Campini C.C.2. The powerplant, designed by SECONDO CAMPINI, used a liquid-cooled piston engine to turn the compressor; a turbineless burner provided thrust.

Mario de Bernardi, winner of the 1926 Schneider Trophy Race, flew the C.C.2 from Taliedo to Guidonia on November 30, 1941. The C.C.2's revolutionary appearance served to arouse public interest in jet aircraft.

COSIMO CANOVETTI, an earlier Italian pioneer, published his theories on turbine engines in 1905 and built a working 3-horse-power model in 1906. Professor LUIGI STIPA designed a "cold" jet engine consisting of a propeller in a venturi housing, a concept embodied in the 1932 Stipa-Caproni.